Physik Vorlesung 1.Semester bei Prof.Dr.Saller

Christian Nawroth, Erstellt mit LaTeX

18. April 2002

Newtonsche Mechanik

1 Die Bewegungsgleichungen

Das Newtonsche Gesetz besagt, dass die Kraft F, die auf einen Körper der Masse m wirkt, genau dem Produkt aus der Masse und der darauf wirkenden Beschleunigung ist:
$F = ma$
Aus dieser Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung lassen sich alle weiteren Bewegungsgleichungen durch integrieren herleiten:

1.1 Fall $a(t) = 0$: Gleichförmige, nicht beschleunigte Bewegung

Die Geschwindigkeit ist das Integral über der Beschleunigung nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v(t) &= \int a(t)dt \\
\Rightarrow v(t) &= \int 0dt \\
\Rightarrow v(t) &= const = v_0
\end{aligned}$$

Die Strecke ist das Integral über die Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow s(t) &= \int v(t)dt \\
\Rightarrow s(t) &= \int v_o dt \\
\Rightarrow s(t) &= v_0 t + s_o
\end{aligned}$$

s_0 ist der Anfangswert der Strecke, der bekannt sein muss.

1.2 Fall $a(t) = const = a_0(t)$: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Geschwindigkeit ist das Integral über der Beschleunigung nach der Zeit:

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(t) &= \int a(t)dt \\ \Rightarrow v(t) &= \int a_0(t)dt \\ \Rightarrow v(t) &= a_0 t + v_0 \end{aligned}$$

v_0 ist der Anfangswert der Geschwindigkeit, der bekannt sein muss.
Die Strecke ist das Integral über die Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$\begin{aligned} sy \quad \Rightarrow s(t) &= \int v(t)dt = \int a_0 t + v_0 dt \\ \Rightarrow s(t) &= \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_o \end{aligned}$$

s_0 ist der Anfangswert der Strecke, der bekannt sein muss.

1.3 Fall $a(t) \neq const$

Für den Fall, dass die Beschleunigung abhängig von einer bestimmten Funktion ist, gilt der selbe Zusammenhang:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int a(t)dt \\ \Rightarrow s(t) &= \int v(t)dt \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich allerdings nur lösen, wenn die Ausgangsgleichung $a(t)$ von einer solchen Form ist, dass sie sich problemlos integrieren lässt. Abschliessende Bemerkung: Alle gezeigten Abhängigkeiten sind Idealfälle, die nur theoretisch unter Ausschluss von sämtlichen Reibungskräften (z.B. Luftwiderstand) gelten. Eine wichtige Beobachtung ist ausserdem, dass die aufgestellten Gleichungen unabhängig von der Masse des bewegten Körpers gelten.

2 Beispiele

Ich verzichte in diesem Kapitel jeweils auf die Herleitung aus der $F = ma$ Formel, durch Integrieren. Es werden die Formeln verwendet, die im ersten Teil allgemein hergeleitet wurden.

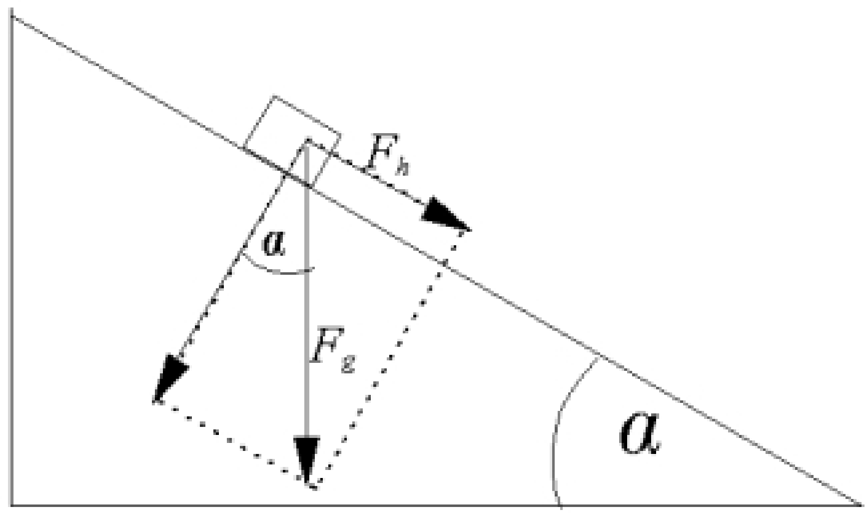
2.1 Gleichförmige Bewegung

Dieser Fall ist eigentlich so einfach, dass ich mich kaum traue ihn, hier hin zu schreiben ;-) Trotzdem: Hans und Fritz stehen an einer Eisenbahn-Strecke. Ein Zug fähr mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 10\frac{m}{s}$ an vorbei. Zum Zeitpunkt $t = 0$ passiert er Hans. Zum Zeitpunkt $t = 10s$ kommt er bei Fritz vorbei. Wie weit stehen die beiden auseinander?

$$\begin{aligned} s(t) &= v_0 \cdot t \\ \Rightarrow s(10s) &= 10\tfrac{m}{s} \cdot 10s = 100m \end{aligned}$$

2.2 Die schiefe Ebene

Ein Körper rutscht auf eiener schiefen Ebene mit dem Winkel α.



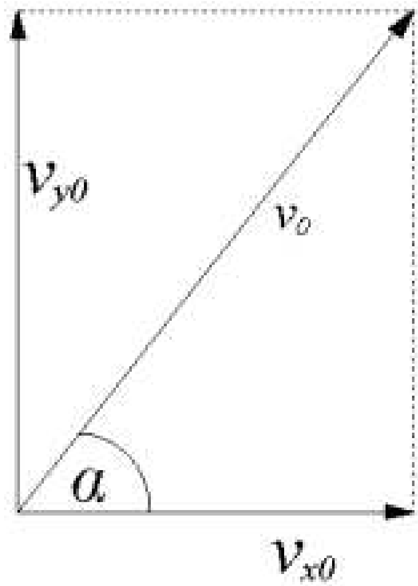
Bei dieser Bewegung gelten die Bewegungsgleichungen der gleichmässig beschleunigten Bewegung. Als beschleunigende Kraft wirkt hier nicht die volle Gravitationskraft, sonder nur die sogenannte Hangabtriebskraft: $F_g = g \cdot \sin\alpha$ (siehe Zeichnung). Daher ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} F_h =& \; F_g \cdot \sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha \\ v(t) =& \; gt \cdot \sin\alpha + v_0 \\ s(t) =& \; \tfrac{1}{2} gt^2 \sin\alpha + v_0 t + s_0 \end{aligned}$$

Die Anfangswerte v_0 und s_0 von Strecke und Gescwindigkeit müssen bekannt sein.

2.3 Der schiefe Wurf

Ein Körperwird aus einer Höhe von h mit einer Geschwindigkeit von v_0 und einem Winkel α abgeworfen. Wann trifft er wieder auf dem Boden auf? Wie weit ist er geflogen? Beim schiefen Wurf handelt es sich um die Überlagerung einer gleichfömrmig beschleunigten und einer gleichförmigen Bewegung, die beide jeweils als eingenständige Bewegung angesehen werden können, da sie sich nicht beeinflussen. Daher ist es nötig, die Abwurfgeschwindigkeit wie folgt zu zerlegen:

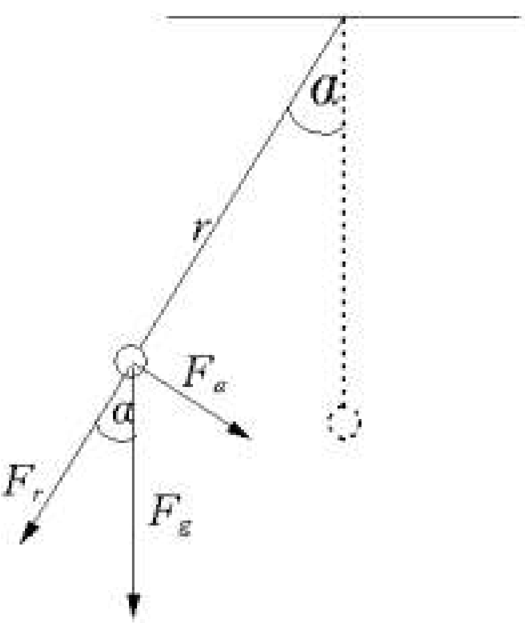


Nach dem Sinus- / Cosinus-Satz gelten folgenden Zusammenhänge:
$v_{x0} = \cos\alpha \cdot v_0$
$v_{y0} = \sin\alpha \cdot v_0$
Zunächst betrachtet man die y-Komponente: Hierbei handelt es sich um eine gleichmšsig beschleunigte (in diesem Fall verzögerte) Bewegung, mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{y0}. Hierfür gelten die in Abschnitt 1.2 hergeleiteten Formeln. Für die Strecke in Abhängigkeit der Zeit gilt allgemein folgender Zusammenhang:
$s(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + s_0$ Für den schiefen Wurf muss diese Formel etwas angepasst werden. Die wirkende Beschleunigung ist die Erdbeschleunigung $g = 9,81\frac{m}{s^2}$. Da sie der Bewegung entgegen wirkt, muss sie mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Dies ist immer der Fall, wenn ein Körper verzögert wird. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_{y0} = v0 \cdot \sin\alpha$. Der Anfangswert der Strecke ist die Abwurfhöhe $h = 1m$.
$\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot \sin\alpha + h$
Mit dieser Formel lässt sich nun die Höhe des Köpers zu jedem beliebigen Zeitpunkt t berechnen. (Natürlich nur so lange bis er wieder auf dem Boden aufgekommen ist ;-)). Um nun die Zeit zu berechnen, die der Gegenstand in der Luft ist setzt man $s(t) = 0$. Dann löst man die quadratische Formel z.B. mit der pq-Formel oder mit quadratischer Ergänzung nach t auf, und man weiss, wann der Gegenstand wieder aufschlägt. Ab hier ist es nur noch Mathematik, wie man das auflöst ist in jedem Schulmathebuch zu finden, weswegen ich hier darauf verzichte.

Möchte man nun noch wissen, wie weit der Gegenstand gefolgen ist, benötigt man die x-Komponente der Bewegung. Wie bereits gezeigt ist diese $v_{x0} = v_0 \cdot \cos\alpha$. Da in x-Richtung keine Kraft wirkt, gilt die Bewegungsgleichung $s(t) = v_0 t + s_0$. In unserem Fall setzt man $v_0 = v_{x0} \cdot \cos\alpha$. Für t setz man die vorher ermittelte Flugdauer ein und sieht dann, wie weit der Körper fliegt.

2.4 Das schwere Pendel

Bei dem schweren Pendel muss man die wirkende Gravitationskraft in zwei Teilkräfte aufspalten. Die Komponente F_r, die parallel zum Radius des Pendels verläuft, sowie die Komponente F_α, die eine Beschleunigung bewirkt und somit die wichtigere ist. Gesucht ist $\alpha(t)$ Da die Kraft F_α den Winkel α verkleinert, muss Sie mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Es gilt (siehe Zeichung):



$F_\alpha = F_g \cdot \sin\alpha \Rightarrow a_\alpha(t) = g \cdot \sin\alpha$
Dummerweise ist α nicht konstant, sondern ändert sich ständig. Somit hat man es hier mit mit einem Fall zu tun, der in 1.3 beschrieben ist. Im Fall des schweren Pendels muss man einige Uformungen durchführen, um eine Lösung zu berechnen. Zunächst betrachtet man die Gleichung $ma(t) = -mg\sin\alpha(t)$ Als Beschleunigung $a(t)$ kann hier die zweite Ableitung des Winkels $\ddot{\alpha}(t)$ angesehen werden. $\Rightarrow m\ddot{\alpha}(t) = mg\sin\alpha$. Um hier weiterzukommen, muss man eine Näherung verwenden (gilt bei kleinen Winkeln):$\alpha \approx \sin\alpha \Rightarrow \ddot{\alpha} = -g \cdot \sin\alpha$ Man erkennt, dass es sich hierbei um eine Differentialgleichung der Form $\ddot{f}(x) = -k \cdot f(x)$ handelt. Diese kann man über den allgemeinen (bekannten) Ansatz $\alpha(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$, die auch beim Schwingkreis Anwendung findet.

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ \dot{\alpha}(t) &= \omega A\sin\omega t - \omega B\cos\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha}(t) = & -\omega^2 A \sin\omega t - \omega^2 B \cos\omega t \\ \ddot{\alpha}(t) = & -\omega^2(\sin\omega t + B\cos\omega t)\end{aligned}$$

Wie man sieht erfüllt diese Gleichung die allgemeine Form $\ddot{f}(t) = -k \cdot f(t)$. Um eine entgültige Lösung zu finden muss noch der Konstante Wert $\omega berechnet werden$. Es gilt:

$$\begin{aligned}-\omega^2 = & -k \\ -\omega^2 = & -g \\ \omega = & \sqrt{g} \\ \Rightarrow \alpha = & A\sin\sqrt{g}t + B\cos\sqrt{g}t\end{aligned}$$

Jetzt müssen nur noch zwei Anfangswerte ermittelt werden: Anfangswinkel(α_0) und Anfangswinkelgeschwindigkeit(ω_0). Dazu betrachtet man die Funktion $\alpha(0)$ und die erste Ableitung $\dot{\alpha}(0)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha_0 = & \alpha(0) = & A\sin 0 + B\cos 0 \\ \alpha_0 = & B\cos 0 = & B\end{aligned}$$

Anfangsgeschwindigkeit ω_0

$$\begin{aligned}\Rightarrow \omega_0 = & \dot{\alpha}(0) = & \sqrt{g}A\cos 0 - \sqrt{g}B\sin 0 \\ \omega_0 = & \sqrt{g}A\cos 0 \\ A = & \frac{\omega_0}{\sqrt{g}}\end{aligned}$$

Die Ergebnisse setzt man nun in die allgemeine Formel ein und erhält eine Funktionsgleichung $\alpha(t)$:
$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{g}}\omega_0 \sin\sqrt{g}t + \alpha_0\cos\sqrt{g}t$

Die Anfansgewinkelgeschwindigkeit ω_0 und der Anfangswinkel α_0 müssen bekannt sein.