Mitschrift Mathematik, Vorlesung bei Dan Fulea, 2. Semester

Christian Nawroth, Erstellt mit LaTeX

23. Mai 2002

Inhaltsverzeichnis

Analysis: Differential- und Integralrechnung in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$

1 Vollständige Induktion

Vorüberlegungen

hu Betrachte $s = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16$
Lösbar nach der Formel: $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$
Wie sind folgende Zusammenhänge lösbar:
$s_n^{(2)} = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \ldots$ (1)
$s_n^{(3)} = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \ldots$
Man betrachtet in diesem Fall die Rekursion (2): $s_{n+1}^{(2)} = s_n^{(2)} + (n+1)^2$ Behauptung: Diese Rekursion ist mit dem Polynom 3.Grades $s(2)_n = an^3+bn^2+cn+d$ lösbar.
Probieren: (1) & (2) ergeben: $a(n+1)^3+b(n+1)^2+c(n+1)+d = an^3+bn^2+cn+d$

$$\begin{array}{r|cc}
\text{in } n^3 & a & = a \\
\text{in } n^2 & 3a+b & = b+1 \\
\text{in } n & 3a+2b+c & = c+2 \\
\text{in } 1 & a+b+c+d & = d+1
\end{array}$$

Es wird zur Lösung eine weitere Gleichung benötigt:
$s(2)_1 = 1^2 = 1 \Rightarrow a+b+c+d = 1 \Rightarrow d = 0$
2.Lösung:

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1^{(2)} & = 1 \\ s_2^{(2)} & = 5 \\ s_3^{(2)} & = 14 \\ s_4^{(2)} & = 30 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a & +b & +c & +d & = 1 \\ 8a & +4b & +2c & +d & = 5 \\ 27a & +9b & +3c & +d & = 14 \\ 64a & +16b & +4c & +d & = 30 \end{cases}$$

1.1 Das Prinzip der Vollstandigen Induktion

Gegeben:

- n_0 natürlich (FEST)
- Für jedes $n \geq n_0$ ganz ist eine AUSSAGE $A(n)$ gegeben

Annahmen:

- (Induktions Anfang): $A(n)$ ist wahr

- (Induktions-Schritt): Die IMPLIKATIONS-AUSSAGE $[A(n) \Rightarrow A(n+1)]$ ist für alles $n \geq n_0$ wahr

Dann (Indikationsschluss): Die Aussage $A(n)$ ist für alle $n \geq n_0$ wahr.

Logikbetrachtung

Fall 1 (logisches UND)

p&q	0	1
0	0	0
1	0	1

Fall 2 (logisches ODER):

p|q	0	1
0	0	1
1	1	1

Fall 3 (logische IMPLIKATION):

p⇒q	0	1
0	1	1
1	0	1

Erläuterung: Aus einer wahren Aussage kann nur eine wahre Aussage gefolgert werden. Aus einer falschen Aussage kann sowohl eine wahre, als auch eine falsche Aussage gefolgert werden.
Beispiel:
A:=Ball Nr. 1 ist rot. B:=Die Bälle sind in einer Reihe geordnet C:=Die Farben von nebeneinanderliegenden Bällen sind gleich.
Frage: Welche Farbe hat der Ball mit der Nr. 2002?
Da der Ball Nr.1 rot ist und die Bälle 1 und 2 als nebeneinanderliegend die selbe Farbe haben folgt, dass der Ball Nr.2 rot ist.
Da der Ball Nr.2 rot ist und die Bälle 2 und 3 als nebeneinanderliegend die selbe Farbe haben folgt, dass der Ball Nr.3 rot ist.
...
Da der Ball Nr.2001 rot ist und die Bälle 2001 und 2002 als nebeneinanderliegend die selbe Farbe haben folgt, dass der Ball Nr. 2002 rot ist.

Beweis der Formel $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$

$n_0 = 1$
$A(n) :=$ Aussage$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$
$A(n_0) :=$ Aussage$1^2 = frac16 \cdot 1 \cdot (1+1)(2+1) \Rightarrow$ WAHR
Beweis der Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für ein festes $n \geq 1$
$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

Weiteres Beispiel

B:=[Alle Frauen haben gleiche Augenfarbe]
Beweis: A(n)=[In jeder Gruppe von n Frauen ist die Augenfarbe KONSTANT ($n \geq 1$)]

- $A(1)$ ist WAHR
- $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

2 Konstruktion von $\mathbb{R}$ (Was ist $\mathbb{R}$?)

1. Konstruktion von $\mathbb{N}$ (Axiomischer Schritt)
2. Konstruktion von $\mathbb{Z}$ (ausgehend von $\mathbb{N}$, algebraischer Schritt)
3. Konstruktion von $\mathbb{Q}$ (ausgehend von $\mathbb{Z}$, algebraischer Schritt)
4. Konstruktion von $\mathbb{R}$ (ausgehend von $\mathbb{Q}$, ANALYSIS)
5. Zusatzkonstruktion von $\mathbb{C}$ (ausgehend von $\mathbb{R}$, algebraischer Schritt)

2.1 Struktur

1. $\mathbb{N}$;+;0;1;$\cdot$;$\leq$
2. $\mathbb{Z}$;$\pm$;0;1;$\cdot$;$\leq$
3. ($\mathbb{Q}$;$\pm$;0;1;$\cdot$;$\div$;$\leq$)
4. ($\mathbb{R}$;$\pm$;0;1;$\cdot$;$\div$;$\leq$)

2.2 Konstruktion von $\mathbb{N}$

Axiomatisch: Wir nehmen an, dass es eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem Element $0 \in \mathbb{N}$ und mit einer Nachfolgefunktion $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt, so dass folgende Eigenschaften gelten:

- Für jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, gibt es ein $m \in m$ mit $s(m) = m$
- $\mathbb{N}$ ist minimal[1]: Falls A eine Untermenge von $\mathbb{N}$ ist mit
  - $0 \in A$
  - s bildet A auf sich selbst ab ($s(A) \subseteq A$)

  Dann ist $A = \mathbb{N}$

[1] äquivalent mit dem Prinzip der Vollständigen Induktion

1. Zusatz: Ausgehend von ($\mathbb{N}$;0,+1) konstruiert man $(\mathbb{N}; 0, +; \cdot, 1; \leq)$

- Notationen: $s(0) := 1$, $s(s(0)) = s(1) =: 2$, $s(s(s(0))) = 3$
- Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$
  - DEF: $m+n = s(s(\ldots(s(n))\ldots)) = s^(m)(n)$, Konvention: $0+n = n$
  - DEF: $m \cdot n = n+n+n+\ldots+n = s^(m)(n)$, Konvention: $0 \cdot n = 0$
  - DEF: $m \leq n$, gdw gilt: Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$ mit $m + p = n$
- Wichtig [2]:
  - $+$ ist assoziativ: Für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$; $(m+n)+p = m+(n+p)$
  - $+$ ist kommutativ: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$: $m+n = n+m$
  - 1 ist neutrale Element bzgl. $\cdot$: $1 \cdot m = m = m \cdot 1$
  - Die Multiplikation $\cdot$ ist Assoziativ
  - Die Multiplikation $\cdot$ ist kommutativ
  - Distributivität: Für alle $m, n, p \in \mathbb{N}$: $(m+n) \cdot p = pm + pn$

2.3 Konstruktion von $\mathbb{Z}$ ausgehend von $\mathbb{N}$

DEF: Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M ist eine Untermenge $\mathcal{R}$ von $M \times M$. Falls $(m, n) \in \mathcal{R}$liegt, schreiben wir kurz: $m \sim n$ dafür. Die Äquivalenzklasse von $m \in M$ ist dann die Menge aller $n \in M$, so dass $m \sim n$ ist.

DEF: Man konstruiert $\mathbb{Z}$ wie folgt:
Die Elemente von $\mathbb{Z}$ sind Äquivalenzklassen von Paaren (m, n) $m, n \in \mathbb{N}$ bzgl. der Äquivalenzrelation $\sim$:
$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ genau dann wenn gilt: $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$
$\mathbb{Z}$ ist die Menge der Äquivalenzklassen von solchen Paaren.

- $+$ ist definiert wie folgt: $(m_1, n_1) + (m_2, n_2) := (m_1 + m_2, n_1 + n_2)$ gedacht als $(m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) = (m_1 + m_1) - (m_2 + n_2)$
- $-$ ist definiert wie folgt: $(m_1, n_1) - (m_2, n_2) := (m_1 + n_2, n_1 + m_2)$ gedacht als $(m_1 + n_2) - (n_1 + m_2) = (m_1 + m_1) - (m_2 + n_2)$
- $\cdot$ ist definiert wie folgt: $(m_1, n_1) \cdot (m_2, n_2) := (m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + n_1 m_2)$

2.4 Konstruktion von $\mathbb{Q}$ ausgehend von $\mathbb{Z}$

DEF: $\mathbb{Q}$ ist die mege der Äquivalenzklassen $[m, n]^{\text{Klasse}\approx}$ von Paaren $[m, n]$ $m, n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$ bzgl. der Äquivalenzrelation:
$[m_1, n_1] \approx [m_2, n_2]$ genau dann wenn gilt: $m_1 n_2 = n_1 m_2$

[2] Man kann alle aufgeführten Eigenschaften durch vollständige Induktion beweisen

- $\pm$ ist definiert wie folgt: $[m_1, n_1]^{\text{Klasse}\approx} \pm [m_2, n_2]^{\text{Klasse}\approx} = [m_1, n_2 \pm n_1, m_2, n_1 n_2]^{\text{Klasse}\approx}$
- $\cdot$ ist definiert wie folgt: $[m_1, n_1]^{\text{Klasse}\approx} \cdot [m_2, n_2]^{\text{Klasse}\approx} := [m_1 m_2, n_1 n_2]$
- $\leq$ ist definiert wie folgt: $[m_1, n_1]^{\text{Klasse}\approx} \leq [m_2, n_2]^{\text{Klasse}\approx}$ genau dann wenn gilt: $m_1 n_2 \leq m_2 n_1$

3 Die Schulananlysis

- $(M, d) \rightarrow$ metrischer Raum. Unsere metrischen Räume: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

3.1 CAUCHY-Folgen und konvergente Folgen in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ (allgemein in metrischen Räumen)

- (x_n) ist CAUCHY $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n(\epsilon)$ gilt: $|x_n - x_m| < \epsilon$
- (x_n) ist konvergent gegen a $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n(\epsilon)$ gilt: $|x_n - a| < \epsilon$
- a heisst der Grenzwert / Limes von x_n, Notation: $a = \lim x_n = \lim_{n\to\infty} x_n x_n \rightarrow a$
- (x_n) ist konvergent $\Leftrightarrow \exists$ Grenzwert a für x_n

3.2 Sätze

- **Satz:** (x_n) CAUCHY in $(M, d) \Leftarrow (x_n)$ konvergent in (M, d)
- **Satz:** (x_n) CAUCHY in $\mathbb{R}, \mathbb{C} \Rightarrow (x_n)$ konvergent in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$
- **Satz:** (x_n) monoton (fallend oder wachsend) und beschränkt in $\mathbb{R} \Rightarrow (x_n)$ konvergent.

3.3 Standard-Folgen:

- Für $0 \leq a \leq 1$ gilt $a^n \rightarrow 0$ (in $\mathbb{R}$)
- Für $|a| \in \mathbb{C}$mit $|a| < 1$ gilt: $a^n \rightarrow 0$
- insbesondere: Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ konvergiert die GEOMETRISCHE REIHE $(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$ gegen $\frac{1}{1-q}$

3.4 REIHEN:

Gegeben die Folgen (a_n) in $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ bildet man die Reihe: (S_n)

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k \leq n} a_k$$

$\Rightarrow$ Die Reihe (S_n) konvergiert, falls sie als Folge konvergiert. Notation für Limes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oder } \sum_n a_n$$

3.5 Konvergenz-Kriterien für Reihen:

- Sei (a_n) eine Folge. Sein (S_n) die entsprechende Reihe:

  $$S_n := \sum_{k \leq n} a_k$$

  dann gilt: (S_n) ist CAUCHY

  $$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \; \forall m, n, \geq n(\epsilon) \text{ gilt: } \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

- DEF: Die Reihe $\sum a_n$ heisst ABSOLUT KONVERGENT $\Leftrightarrow \sum |a_n|$ konvergent

- $\sum a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum a_n$ konvergent

- VERGLEICH-Kriterium; Gegeben: $(a_n), (b_n)$ mit: $0 \leq |a_n| \leq b_n$ Dann gilt: $\sum b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum a_n$ konvergent
  Beweis-Idee: Abschätzung: Für alle $m, n; m \leq n$ gilt:

  $$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_k$$

- Das QUOTIENTEN-Kriterium: Gegeben: $(a_n)_n$; (ab einem Index sind die Folgeglieder $\neq 0$) Annahme: es gibt $q < 1$: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$, für alle n 'ab einem Index' Damm ist $\sum a_n$ ABSOLUT konvergent

- Das Wurzel-Kriterium: Sei (a_n) eine Folge: Annahme: Es gibt ein

  $$q < 1 \text{ und einen Index } N_0 \text{ mit: } \sqrt[n]{|a_n|} < q \text{ alle } n \geq N_0$$

3.6 Beispiel

Sie $x \in \mathbb{C}$ Dann konvergiert: $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ABSOLUT

Begründung (Quotienten Kriterium): Sei $a_n := \frac{x^n}{n!}$ Dann gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(x+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|}{n-1} < \frac{1}{2} \text{ für } n > 2 \cdot |x|$$

3.7 DEF: $\exp x$

$$\exp x := e^x := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \text{ und } x \in \mathbb{C}$$

- Eigenschaften:
  - $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
  - $\overline{e^x} = e^{\overline{x}}$
- DEF: $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- Dann: $\cos x \in \mathbb{R}$, $\sin x \in \mathbb{R}$ falls $x \in \mathbb{R}$
  Reihen Darstellung:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \ldots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \ldots$$

- DEF:
  e ist definiert als $\exp 1$
  Π ist definiert, wie folgt: $\frac{\Pi}{2}$ ist die kleinste reele Nullstelle von $\cos$
- DEF: (M, d) und (M', d') metrische Räume
  $f : M \to M'$ heisst STETIG, gew. gilt: f ist stetig an jeder Stelle $a \in M$
  f ist stetig an der Stelle $a \in M$ gdw gilt:
  $\forall \epsilon > 0$(egal, wie gut man den Wert $f(a)$ approximieren will) $\exists \delta(\epsilon)$ (gibt es eine entsprechende Toleranz für $a \forall x \in$ mit $d(x, a) < \epsilon$ so dass für alle$x$ in einer Kugel mit Radius ϵ um a gilt: $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$)

3.8 Beispiel: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n$ ist stetig

Begündung: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, sei $\varepsilon > 0$ (zufällig erzeugt)
Ich wähle $\delta := min(1, \frac{\varepsilon}{2n \cdot M^{n-1}})$, wobei $M := |x_0| + 1$
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0|$ Dann gilt die Abschätzung:
$|f(x) - f(x_0)| = |x^n - x_0^n| = \left|(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots x_0^{n-1})\right|$
$= |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^{n-1}\right|$
$\leq |x - x_0| \cdot [|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|x_0| + \ldots + |x_0|^{n-1}]$
$\leq \delta \cdot [M^{n-1} + M^{n-1} + \ldots + M^{n-1}] = \delta \cdot n \cdot M^{n-1} < \varepsilon$

3.9 Differenzierbarkeit

Definition: $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x)$$

Definition: Sei f: $U \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ eine (stetige) Funktion. Sei $x_0 \in U$ (Eine Kugel $K(x_0, \varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k : |x - x_0| < \varepsilon\}))$ dann heisst f in x_0 differenzierbar, ewnn gilt:
Es gibt eine lineare Abbildung $A(\hat{=} l \times k) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ ($k \times 1$ und $l \times 1$ - Matrizen (Spaltenvektoren)) mit

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)| \text{ in } \mathbb{R}^l}{|x - x_0| \text{ in } \mathbb{R}^l} = 0$$

Bei diese Matrix handelt es sich um die Ableitung.

3.9.1 Berechnung der Ableitung

Satz: Berechnung der Ableitung einer Funktion $f : U \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^l$ durch reduktion auf den eindimensionalen Fall

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_l(x) \end{pmatrix} = f(x)$$

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}; f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := x^3 + 3xy + y^2$$

$$f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right] \text{ in } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [3x^2 + 3y, 3x + 2y]$$

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y \\ x^2 \cdot y \\ z^3 \end{pmatrix}$$

Definition: Eine Funktion f heisst Differnzierbar, falls sie an jeder Stelle (des Definitionsbereiches) differenzierbar ist.
Eigenschaften:

- $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diff'bar, dann gilt: $(fg)' = f'g + fg'$ **Produktregel**
- $U(\mathbb{R}^k) \longrightarrow^f V(\mathbb{R}^l) \longrightarrow^g \mathbb{R}^m$ f, g diff'bar, dann ist die Verkettung $g \circ f$ diff'bar (**Kettenregel**):
  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- f, g diff'bar dann $(f \pm g)' = f' \pm g'$

3.10 Zwischenwersatz

Satz: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine *stetige* Funktion mit $f(a) > 0, f(b) < 0$ Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$

3.11 Zwischenwertsatz nach Lagrange

Satz: Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine diff'bare Funktion (f' stetig) $\Rightarrow f$. ist stetig differnzierbar. Dann existiert ein Zwischenwert (oder Mittelwert),$\xi \in [a, b]$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Äquivalent $f(b) = f(a) + f'(\xi) \cdot (b - a)$ Verallgemeinerung: Das **Taylor - Polynom**

$$f(x) = \left[f(a) + frac11!f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x - a)^n\right] + \text{REST}$$

Das Taylor Polynom $T_{a,n}(x)$ im a von der Ordnung n.
Schreibweise:

$$f(x) = T_{a,n} + ø(|x - a|^{n+1})$$

oder

$$f(x) = T_{a,n} + \o(|x-a|^n)$$

Beispiel: $f(x) := +\sin(x) + \cos(x)$
$f'(x) - \sin(x) + \cos(x)$
$f''(x) - \sin(x) - \cos(x)$
$f'''(x) + \sin(x) - \cos(x)$
$f''''(x) + \sin(x) + \cos(x)$

Für $a = 0$: $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -1, \ldots$

$$\Rightarrow T(x) = 1 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$