Mitschrift Mathematik, Vorlesung bei Dan Fulea, 1. Semester

Christian Nawroth

4. Dezember 2001

Komplexe Zahlen

1 Körper

Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, +, -, 0, 1$

DEF: Ein Körper ist gegeben, wenn die folgende Struktur vorliegt:

- K: Menge
- $+$: Addition, Funktion $K \times K \to K \qquad (x, y) \to x + y$
- $\cdot$: Multiplikation, Funktion $K \times K \to \qquad (x, y) \to x \cdot y$

Folgende Körperaxiome müssen dabei gelten:

A1 (Assoziativität von +):

Für alle $x, y, z \epsilon K \qquad (x + y) + z = x + (y + z)$

A2 (Existenz einer 0):

Es gibt ein Element $0 \epsilon K$, so dass für alle $x \epsilon K$ gilt: $x + 0 = x = 0 + x$

A3 (Existenz eines Inversen Elements bzgl. +):

Für jedes $x \epsilon K$ existiert ein Element $(-x) \epsilon K$, so dass gilt $x+(-x) = 0 = (-x)+x$

A4 (Kommutativität von +):

Für alle $x, y \epsilon K$ gilt $x + y = y + x$

A5 (Assotiativität von $\cdot$):

Für alle $x, y, z \epsilon K$ gilt $(xy)z = x(yz)$

A6 (Existenz der 1):

Es gibt ein Element $1 \epsilon K$, so dass für alle $x \epsilon K$ gilt: $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$

A7 (Kommutativität von $\cdot$):

für alle $x, y \epsilon K$ gilt: $x \cdot y = y \cdot x$

A8 (Distributivität):

Für alle $x, y, z \epsilon K$ gilt: $x(y + z) = xy + xz$

A8 (Inverse Elemete bzgl. $\cdot$):

Zu jedem $x \epsilon K \backslash \{0\}$ gibt es ien Element $x^{-1} \epsilon K$, so dass gilt: $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

Gelten die folgenden Axiome, so handelt es sich um...

- (K,+, $\cdot$): A1..A3: Gruppe
- (K,+, $\cdot$): A1..A4: kommutative Gruppe
- (K,+, $\cdot$): A1..A8: Ring
- (K,+, $\cdot$): A1..A9: Körper

2 $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen

2.1 Grobe Umschreibung

$\mathbb{C}$ ist die Menge von Zahlen von $a + ib$, mit $a, b \epsilon \mathbb{R}$
Addition $(a, ib) + (a', ib') = (a + a') + i(b + b')$
Multiplikation:

$$\begin{aligned} (a, ib)(a', ib') &= aa' + a \cdot ib' + a'ib + i^2bb' \\ &= aa' + a \cdot ib' + a'ib - bb' \end{aligned}$$

2.2 Konstruktion von $\mathbb{C}$ ausgehend von $\mathbb{R}$

DEF:
$\mathbb{C}$ als Menge ist:
$\mathbb{C} = \{(a, b); a, b \epsilon \mathbb{R}\}$
$\cong \mathbb{R}^2$

- Die Addition '+' auf $\mathbb{C}$ ist: $(a, b)+(a'b') := (a+a', b+b')$ für alle $a, a', b, b' \epsilon \mathbb{R}$
- Die Multiplikation '·' von $\mathbb{C}$ ist:

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b)$$

SATZ: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit

- Nullelement: $(0, 0)$
- Einselement: $(1, 0)$
- Additionsinverses Element zu (a, b) ist $(-a, -b)$
- Multiplikationsinverses Element zu (a, b) ist $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

2.3 Beweis einiger Axiome in $\mathbb{C}$

Alle Rechnungen innerhalb der Tupel finden in $\mathbb{R}$ statt.

- Assozitivität von +: Seien $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \epsilon \mathbb{C}$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& ((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) \\
:= \; & (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\
:= \; & ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) \\
= \; & (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) \\
=: \; & (a_1, b_1) + (a_2 + b_3, b_2 + b_3) \\
=: \; & (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3, b_3))
\end{aligned}$$

- (0,0) ist neutral zu +, da für alle $(a, b) \epsilon \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(a, b) + (0, 0) &= (a + 0, b + 0) = (a, b) \\
(0, 0) + (a, b) &= (0 + a, 0 + b) = (a, b)
\end{aligned}$$

- Jedes Element besitzt das Inverse Element (-a, -b) bzgl. +

$$\begin{aligned}(a,b)+(-a,-b) &= (a+(-a),b+(-b))=(0,0)\\ (-a,-b)+(a,b) &= ((-a)+a,(-b)+b)=(0,0)\end{aligned}$$

- Kommutativität von+ für $(a,b),(a',b')\epsilon\mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(a,b)+(a',b') &=: (a+a',b+b')\\ &= (a'+a,b'+b)\text{Addition in }\mathbb{R}\\ &=: (a',b')+(a,b)\end{aligned}$$

- Analog können die weiteren Aximone in $\mathbb{C}$ auf Axiome in $\mathbb{R}$ reduziert werden.

2.4 Notationen

- Wir hatten den Körper $\mathbb{C}=(a,b);a,b\epsilon\mathbb{R}$ konstruiert. Die Notation (a,b) für ein Elemnt von $\mathbb{C}$ ist NICHT üblich. (Sie dient nur zur genauen Konstruktion).
- Statt $(a,0)$ schreibt man a
- Statt $(0,1)$ schreibt man i
- dann gelten die Relationen: $(a,b)\epsilon\mathbb{R}$
  $(a,0)\leftrightsquigarrow a$
  $(0,1)\leftrightsquigarrow i$
  $(a,b)\leftrightsquigarrow a+ib$

$$\begin{aligned}i^2 &= (0,1)\cdot(0,1)\\ &= (0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)\\ &= (-1,0)\\ &= -(1,0)\end{aligned}$$

$\Rightarrow -(1,0)\hat{=}(-1)$

2.5 die Trigonometrische Form, von komplexen Zahlen

- Sei $a + ib\epsilon\mathbb{C}$ $(a, b\epsilon\mathbb{R})$
- Seien:
  * $r := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$
  * $\vartheta :=$ einzige reelle Zahl im Intervall $[0; 2\Pi[$ mit $\cos\vartheta = \frac{a}{r}$ und $\sin\vartheta = \frac{b}{r}$ für $r \neq 0 a + ib = r(\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta) = re^{i\vartheta}$
- Die Exponetialfunktion $\exp(x)$ an der Stelle $Z = x + iy\epsilon\mathbb{C}$ ist definiert als

  $$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...\frac{z^n}{n!}$$

  Diese unendliche Summe konvergiert in $\mathbb{C}$.
- Man kann beweisen:
  $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$ für alle $z_1, z_2\epsilon\mathbb{C}$.
  Dies erklärt die Notation: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$
- Für $\vartheta\epsilon\mathbb{R}$ (oder allgemeiner aus$\mathbb{C}$) definiert man sin und cos wie folgt:

  $$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

Bemerkung

- Man addiert komplexe Zahlen leichter in der Form $a + ib$

  $$(a + ib) + (a' + ib') = a + a' + i(b + b')$$

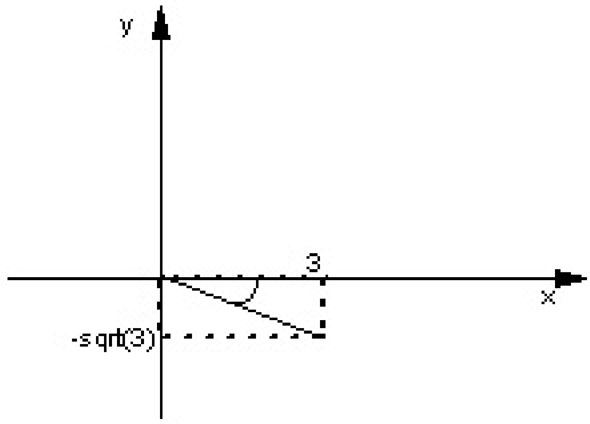
- Man multipliziert komplexe Zahlen leichter in der Form $re^{i\vartheta}$

  $$(a + ib) + (a' + ib') = a + a' + i(b + b')$$

  $$re^{i\vartheta} \cdot r'e^{i\vartheta} = r \cdot r'e^{i\vartheta}$$

Beispiel

$(3 - i\sqrt{3})^{2000}$ Erster Schritt: Eintragen der Real und Imaginär Komponente in ein Koordinatensystem um dem Winkel ϑ abzulesen.



$\Rightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{6}$

Der Betrag von z, in Notation $|z|$ist:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(+3)^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow z = 2\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6})) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \\ z^{2000} &= (2\sqrt{3})^{2000} \cdot (e^{-i\frac{\pi}{6}})^{2000} \\ &= 2^{2000} \cdot 3^{1000} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6} \cdot 2000} \\ &= 2^{2000} \cdot 3^{1000} \cdot (\cos -\frac{\pi}{6} \cdot 2000) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{6} \cdot 2000) \\ &= 2^{2000} \cdot 3^{1000} \cdot (\cos \frac{\pi}{3} \cdot -1000) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3} \cdot -1000) \end{aligned}$$

Da gilt: $2\pi = \frac{6\pi}{3}$ wird gerechnet:$-1000 mod 6 = 2 mod 6$ und daher gilt:

$$\begin{aligned} &= 2^{2000} \cdot 3^{1000} \cdot (\cos \frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ &= 2^{2000} \cdot 3^{1000} \cdot (-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned}$$

3 Beweis trigonometrischer Integritäten anhand der komplexen Zahlen

Wie sind die Formeln für:
$\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$
$\sin(2x)$, $\sin(3x)$, $\cos(2x)$, $\cos(3x)$
in Abhängigkeit von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(y)$, $\cos(y)$

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix+iy} = e^{ix} + e^{iy} \\
&= (\cos(x) + i \cdot \sin(x))(\cos(y) + i \cdot \sin(y)) \\
&= [\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)] + i[\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\sin(y)] \\
\Rightarrow \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \text{ Real-Anteil} \\
\sin(x+y) &= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) \text{ imaginär Anteil}
\end{aligned}$$

Diese Formeln entstehen, wenn man den Real- bzw Imaginäranteil der Ausdrücke am Anfang und Ende der Berechnung <u>identifiziert</u>.
Für $x = y$ in $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
\sin &= \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\cos(x)\sin(x)
\end{aligned}$$

Beweis: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\begin{aligned}
1 &= e^0 = e^{ix-ix} = e^{ix} \cdot e^{-ix} \\
&= (\cos(x) + i \cdot \sin(x))(\cos(-x) + i \cdot \sin(-x)) \\
&= (\cos(x) + i \cdot \sin(x))(\cos(x) - i \cdot \sin(x)) \text{ Anwendung der binomischen Formel} \\
&= (\cos^2(x) - i^2 \sin^2(x) \\
&= \cos^2(x) + \sin^2(x)
\end{aligned}$$

4 Weitere Beispiele von Körpern, endliche Körper

$\mathbb{Q}, \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \mathbb{F}_2$
SATZ: Es gibt einen (strukturell eindeutigen) Körper mit p Elementen genau dann, wenn p eine Primzahl ist. Dieser Körper wird bezeichnet $\mathbb{F}_P(+,\cdot)$. Man kann diese Körperstruktur einführen:
$\mathbb{F}_p$ ='Menge der mögllichen Reste bei der Division mit p'
$= \{\dot{1}; \dot{1}; \dot{2}; \dot{3}; \ldots (p-1)\}$
Konvention; Es ist erlaubt, auch zu verwenden ($n \epsilon \mathbb{Z}$), wobei dann $\dot{1}1$ für 'den Rest von n bei der Division mit p' steht. In $\mathbb{F}_{13}$ gilt:

$-\dot{11} = \dot{2} = \dot{15} = \dot{28}\dots$
Alternative Notation:
$-11 mod 13 = 2 mod 13 = 15 mod 13$
$-11 \equiv 2 \equiv 15[13]$

Die Addition in $\mathbb{F}_p$ ist

$\dot{m} + \dot{n} = \dot{\widehat{m+n}}$

Die Multiplikation in $\mathbb{F}_p$ ist:

$\dot{m} \cdot \dot{n} = \dot{\widehat{m \cdot n}}$

Beispiel: Der Körper $\mathbb{F}_3$

Addition

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$

Mulitplikation

$\cdot$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

5 Gleichungssysteme

- Das GAUSS Verfahren
- Determinanten
- 'strukturelle' Lösung

Ein LGS ist ein System von Gleichungen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

mit
$a_{ij\epsilon\mathbb{K}}$ alle i von 1 bis n
$b_i\epsilon\mathbb{K}$ alle j von 1 bis m

die Symbole x_1, x_2, x_n nennt man UNBEKANNTE. Eine Lösung des LGS ist $(\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_n)\epsilon\mathbb{K}^n$, so dass das Einsetzen von χ_i in x_i, die Aussagen im LGS zu GLEICHHEITEN macht.

5.1 Lösung nach dem Gaussverfahren

Man such sich ein PIVOT Element, mit dessen Hilfe man alle anderen Werte in der Spalte auf 0 setzt.

A	$\ldots$	B
$\vdots$		$\vdots$
C	$\ldots$	D
A	$\ldots$	B
$\vdots$		$\vdots$
0	$\ldots$	$D - \frac{BC}{A}$

Dabei werden die Werte unterhalb des Pivot-Elements auf 0 gesetzt, der Wert an der früheren Stellen D wird nach der Formel neu berechnet.

5.2 strukturelle Lösung, Determinanten

DEF: Die Determinante einer Matrix $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
mit Einträgen in einme Körper $\mathbb{K}$ ist $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$

SATZ: Das GS in einem Körper $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung, wenn gilt: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

In diesem Falle sind die Lösungen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

DEF: Die Determinante einer 3×3 Matrix $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mit Einträgen in einem Körper $\mathbb{K}$ ist (nach der Sarrus Formel): Addition der drei Hauptdiagonalen - die drei Nebendiagonalen:

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

In Notation: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

SATZ: Das GS in $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33} & = & b_3 \end{cases}$$

hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{K}$, wenn gilt: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$

Dann sind die Lösungen nach der 'Kramerschen Formel':

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$