

Übungen zur Analysis I

SS 2002 : ba.uni-mannheim.de

Dr. Dan Fulea

Internetbegleitung

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~dan/Teaching/SS2002/ba.tex>

Kapitel 1

Das Taylor–Polynom

1.1 Theorie

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall in \mathbb{R} .

Sei x_0 in I .

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine p mal stetig differenzierbare Funktion.

Schreibweise:

$$f \in \mathcal{C}^p(I) .$$

(Dies bedeutet, dass f differenzierbar ist und folglich die Ableitung f' existiert, dass zusätzlich f' erneut differenzierbar ist und folglich die zweite Ableitung f'' existiert, usw. bis zuletzt $f^{(p)}$, die p -te Ableitung von f existiert und diese **stetig** ist.)

Dann ist das TAYLOR–Polynom von f von der Ordnung p um x_0 das folgende Polynom $T_p(x)$ oder in voller Notation mit Berücksichtigung aller Parameter $T_{p,f,x_0}(x)$:

$$\begin{aligned} T_p(x) &= T_{p,f,x_0}(x) \\ &:= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0)(x - x_0)^p \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k . \end{aligned}$$

Proposition 1 Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (nicht nur eine p mal sondern sogar) eine $(p + 1)$ Male stetig differenzierbare Funktion,

$$f \in \mathcal{C}^{p+1}(I)$$

Dann ist T_p eine Approximation p -ter Ordnung von f um x_0 in dem Sinne, dass gelten:

$$f(x) = T_p(x) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)(x - x_0)^{p+1}$$

für ein geeignetes ξ zwischen x_0 und x . Insbesondere:

$$\begin{aligned} |f(x) - T_p(x)| &= \frac{1}{(p+1)!} |f^{(p+1)}(\xi)| |x - x_0|^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{(p+1)!} \cdot \max_{\xi \text{ zwischen } x_0, x} |f^{(p+1)}(\xi)| |x - x_0|^{p+1} . \end{aligned}$$

Aus diesem Grund wird oft auch die Schreibweise verwendet:

$$f(x) = T_p(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) .$$

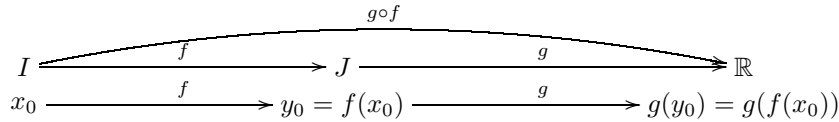
Proposition 2 Für zwei Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^p(I)$ gilt:

$$\begin{aligned} T_{p,f+g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) &= T_{p,f}(x) + T_{p,g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ T_{p,f-g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) &= T_{p,f}(x) - T_{p,g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ T_{p,fg}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) &= T_{p,f}(x)T_{p,g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) \end{aligned}$$

Proposition 3 Seien I, J zwei offene Intervalle aus \mathbb{R} .

Seien $f : I \rightarrow J$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen der Klasse \mathcal{C}^p .

Seien $x_0 \in I$ und $y_0 := f(x_0)$. Im Bild:



Seien $T_{p,f} = T_{p,f,x_0}$ und $T_{p,g} = T_{p,g,y_0}$ die zugehörigen TAYLOR-Polynome für f und g um x_0 bzw. y_0 . Dann gilt für das TAYLOR-Polynom von der Ordnung p für die Verkettung $g \circ f$ um x_0 :

$$T_{p,g \circ f, x_0}(x) = T_{p,g, y_0} \circ T_{p,f, x_0}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}).$$

1.2 Aufgaben

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1-x}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Wir beweisen durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) := [\quad \text{Es gilt } f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1} \quad].$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr: Die "nullte" Ableitung von f ist die Funktion f selbst, also gilt: $f^{(0)}(x) = f(x) = 1/(1-x) = 0!(1-x)^{-0-1}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [n!(1-x)^{-n-1}]' = n! \cdot (-n-1)(1-x)^{-n-2} \cdot (1-x)' \\ &= (n+1)!(1-x)^{-(n+1)-1}. \end{aligned}$$

So ist die Aussage $A(n+1)$ auch wahr.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Es gilt insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = n!(1-0)^{-n-1} = n!.$$

Das gesuchte TAYLOR-Polynom ist also:

$$T_p(x) = \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = \sum_{0 \leq k \leq p} x^k = 1 + x + \dots + x^p.$$

Ein maple-Beispiel dazu:

```
> taylor( 1/(1-x) , x=0 , 11 );
      2   3   4   5   6   7   8   9   10   11
1 + x + x + x + x + x + x + x + x + x + x + 0(x )
```

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1+x}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Die Funktion f entsteht als Verknüpfung der Funktionen $x \rightarrow -x$ und $y \rightarrow 1/(1-y)$. Aus diesem Grund ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^p + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= \underbrace{1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p x^p}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$T_p(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p x^p.$$

Ein maple-Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1+x) , x=0 , 11 );
      2   3   4   5   6   7   8   9   10   11
1 - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x + O(x )
```

Aufgabe 6

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1/a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1+ax}, \quad x \in I.$$

Dabei ist $a > 0$ eine reelle Zahl.

LÖSUNG: Die Funktion f entsteht als Verknüpfung der Funktionen $x \rightarrow -ax$ und $y \rightarrow 1/(1-y)$. Aus diesem Grund ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+ax} = \frac{1}{1-(-ax)} = 1 + (-ax) + (-ax)^2 + \dots + (-ax)^p + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= \underbrace{1 - ax + a^2 x^2 - \dots + (-1)^p a^p x^p}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$T_p(x) = 1 - ax + a^2 x^2 - \dots + (-1)^p a^p x^p.$$

Ein maple-Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1+a*x) , x=0 , 7 );
      2   2   3   3   4   4   5   5   6   6   7
1 - a x + a x - a x + a x - a x + a x + O(x )
```

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in I.$$

Die Funktion f entsteht als Verknüpfung der Funktionen $x \rightarrow -x^2$ und $y \rightarrow 1/(1-y)$. Aus diesem Grund ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^p + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^p x^{2p} + \mathcal{O}(x^{p+1}) = \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k x^{2k} + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^k x^{2k}}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}) = \underbrace{1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} x^{2 \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$T_p(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} x^{2 \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}.$$

Ein maple-Beispiel dazu:

```
> taylor( 1/(1+x^2), x=0, 21 );
      2    4    6    8    10    12    14    16    18    20    22
1 - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x + 0(x )
```

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 11 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arctan x, \quad x \in I.$$

Hinweis: Die Ableitung von \arctan wurde in der letzten Aufgabe behandelt.

LÖSUNG: Die Ableitung von F ist die Funktion

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Das TAYLOR-Polynom von der Ordnung

$$p - 1 = 10$$

für diese Ableitung wurde in der letzten Aufgabe berechnet:

$$T_{p,f',x_0=0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}.$$

Dann ist das TAYLOR-Polynom von f diejenige polinomiale Funktion, welche

- ▷ eine Stammfunktion von $T_{p,f',x_0=0}(x)$ ist und
- ▷ an der Stelle $x_0 = 0$ mit f übereinstimmt.

Aus $\arctan = 0$ folgt dann:

$$T_{p,f,x_0=0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}.$$

Der maple-Code:

```
> taylor( arctan(x) , x=0 , 11 );
      3      5      7      9      11
x - 1/3 x + 1/5 x - 1/7 x + 1/9 x + O(x )
```

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 20 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1 + 4x^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Setzt man $y = -4x^2$ (oder (un)genauer $y = x^2 + \mathcal{O}(x^{21})$) in die Entwicklung

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots + y^{20} + \mathcal{O}(y^{21})$$

ein, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+4x^2} &= \frac{1}{1-(-4x^2)} \\ &= 1 + (-4x^2) + (-4x^2)^2 + \dots + (-4x^2)^{10} + (-4x^2)^{11} + \dots + (-4x^2)^{20} + \mathcal{O}(x^{21}) \\ &= 1 + (-4x^2) + (-4x^2)^2 + \dots + (-4x^2)^{10} + \mathcal{O}(x^{21}) \\ &= \underbrace{1 - 4x^2 + 4^2x^4 - 4^3x^6 + \dots + 4^{10}x^{20}}_{T_{20}(x)} + \mathcal{O}(x^{21}). \end{aligned}$$

Der maple–Code:

```
> taylor( 1/(1+4*x^2) , x=0 , 21 );
      2      4      6      8      10      12      14      16
1 - 4 x + 16 x - 64 x + 256 x - 1024 x + 4096 x - 16384 x + 65536 x
      18      20      22
- 262144 x + 1048576 x + O(x )
```

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 10 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{1 + 4x^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x}{1 + 4x^2} = x \cdot \frac{1}{1 + 4x^2} \\ &= (x + \mathcal{O}(x^{11})) \cdot (1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + 256x^8 - 1024x^{10} + \mathcal{O}(x^{11})) \\ &= x - 4x^3 + 16x^5 - 64x^7 + 256x^9 - 1024x^{11} + \mathcal{O}(x^{11}) \\ &= x - 4x^3 + 16x^5 - 64x^7 + 256x^9 + \mathcal{O}(x^{11}). \end{aligned}$$

Der maple–Code:

```
> taylor( x/(1+4*x^2) , x=0 , 11 );
      3      5      7      9      11
x - 4 x + 16 x - 64 x + 256 x + O(x )
```

Aufgabe 11

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 6 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := 4 \sin^2(\cos(x) - 1) - \tan^4(x), \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Wir berechnen zuerst:

$$\begin{aligned} \cos(x) - 1 &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \mathcal{O}(x^7), \\ \sin(\cos(x) - 1) &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right)^5 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^7) \\ &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2!}x^2 \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!} 0 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^7) \\ &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{3!} \frac{1}{2!^3} x^6 \right) + \mathcal{O}(x^7), \end{aligned}$$

(Eigentlich spielt der Term in x^6 bald keine Rolle mehr, da wir quadrieren:)

$$\begin{aligned} \sin^2(\cos x - 1) &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2!^2}x^4 - 2 \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4!}x^6 + \mathcal{O}(x^7) \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \mathcal{O}(x^7). \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5), \\ \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2!}x^2\right) + \left(\frac{1}{2!}x^2\right)^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5),\end{aligned}$$

was man schneller erhalten kann.

$$\begin{aligned}\tan^4 x &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)^4 \\ &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) + \binom{4}{2}x^2 \left(\frac{1}{3}x^3\right)^2 + \dots + \mathcal{O}(x^7) \\ &= x^4 + 4x^3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^7) \\ &= x^4 + \frac{4}{3}x^6 + \mathcal{O}(x^7), \\ 4\sin^2(\cos x - 1) - \tan^4 x &= 4\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \mathcal{O}(x^7)\right) - \left(x^4 + \frac{4}{3}x^6 + \mathcal{O}(x^7)\right) \\ &= -\frac{3}{2}x^6 + \mathcal{O}(x^7).\end{aligned}$$

■

Der maple-Code:

```
> taylor( 4*(sin(cos(x)-1))^2-tan(x)^4 , x=0 , 7 );
      6      8
- 3/2 x  + 0(x )
```

Man kann natürlich auch die Zwischenschritte durch maple entsprechend überprüfen.

Aufgabe 12

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 5 um $x_0 = 1$ für die polynomiale Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 1, \quad x \in I$$

- mit der Definition,
- mit dem Horner-Schema,
- mit maple,
- mit der Substitution $x = 1 + (x - 1) = 1 + h$, wobei $h := (x - 1)$ ist.

LÖSUNG:

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Definition. Die maple-Unterstützung ist zwecks Vereinfachung der Tipparbeit unabdingbar:

```
f := x^5-3*x^4+4*x^3+5*x^2-x-1 ;
ableitung[0] := f;
for n from 1 to 5 do
  ableitung[n] := diff( f , x$n );
od:
for n from 0 to 5 do
  print( n, ableitung[n] , subs(x=1, ableitung[n]) );
od:
```

Es entstehen als Ergebnisse:

```

      5      4      3      2
0, x  - 3 x  + 4 x  + 5 x  - x - 1, 5

      4      3      2
1, 5 x  - 12 x  + 12 x  + 10 x - 1, 14

      3      2
2, 20 x  - 36 x  + 24 x + 10, 18

      2
3, 60 x  - 72 x + 24, 12

4, 120 x - 72, 48

5, 120, 120
```

Durch Komma getrennt sind dabei in jeder Zeile:

n laufend von 0 bis 5, die n -te Ableitung von f , und der Wert dieser n -ten Ableitung von f an der Stelle 0.

Das TAYLOR-Polynom von f ist also:

$$5 + \frac{1}{1!}14x + \frac{1}{2!}18x^2 + \frac{1}{3!}12x^3 + \frac{1}{4!}48x^4 + \frac{1}{5!}120x^5 .$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit dem Horner-Schema:

	1	-3	4	5	-1	-1
1	1	-2	2	7	6	5
1	1	-1	1	8	14	
1	1	0	1	9		
1	1	1	2			
1	1	2				
1	1					

Wir lesen das TAYLOR-Polynom ab:

$$\boxed{5} + \boxed{14}(x-1) + \boxed{9}(x-1)^2 + \boxed{2}(x-1)^3 + \boxed{2}(x-1)^4 + \boxed{1}(x-1)^5 .$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit maple:

```
> f := x^5-3*x^4+4*x^3+5*x^2-x-1 ;
      5      4      3      2
f := x  - 3 x  + 4 x  + 5 x  - x - 1

> taylor( f , x=1 , 6 );
      2      3      4      5
5 + 14 (x - 1) + 9 (x - 1)  + 2 (x - 1)  + 2 (x - 1)  + (x - 1)
```

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Substitution $x = 1 + (x - 1) = 1 + h$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 1 \\
 &= (1+h)^5 - 3(1+h)^4 + 4(1+h)^3 + 5(1+h)^2 - (1+h) - 1 \\
 &= (1 + 5h + 10h^2 + 10h^3 + 5h^4 + h^5) \\
 &\quad - 3(1 + 4h + 6h^2 + 4h^3 + h^4) \\
 &\quad + 4(1 + 3h + 3h^2 + h^3) \\
 &\quad + 5(1 + 2h + h^2) \\
 &\quad - (1 + h) \\
 &\quad - (1) \\
 &= (1 - 3 + 4 + 5 - 1 - 1) \\
 &\quad + (5 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 1)h \\
 &\quad + (10 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1)h^2 \\
 &\quad + (10 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1)h^3 \\
 &\quad + (5 - 3 \cdot 1)h^4 \\
 &\quad + h^5 \\
 &= 5 + 14h + 9h^2 + 2h^3 + 2h^4 + h^5 .
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man mit maple nach gleicher Idee vorgehen:

```

> f := x^5-3*x^4+4*x^3+5*x^2-x-1 ;
      5      4      3      2
      f := x  - 3 x  + 4 x  + 5 x  - x - 1

> T := subs( x=1+h , f );
      5      4      3      2
      T := (1 + h)  - 3 (1 + h)  + 4 (1 + h)  + 5 (1 + h)  - 2 - h

> expand(T);
      2      3      4      5
      5 + 14 h + 9 h  + 2 h  + 2 h  + h
    
```



Aufgabe 13

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 4 um $x_0 = -2$ für die polynomiale Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^5, \quad x \in I$$

- mit der Definition,
- mit dem Horner-Schema,
- mit maple,
- mit der Substitution $x = -2 + (x - (-2)) = -2 + h$, wobei $h := (x - (-2)) = (x + 2)$ ist.

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Definition. Die Ableitungen von f und die entsprechenden Werte in -2 sind:

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = x^5, & f(-2) & = (-2)^5 = -32, \\
 f'(x) = 5x^4, & f'(-2) & = 5(-2)^4 = 80, \\
 f''(x) = 4 \cdot 5x^3, & f''(-2) & = 4 \cdot 5(-2)^3 = -160, \\
 f'''(x) = 3 \cdot 4 \cdot 5x^2, & f'''(-2) & = 3 \cdot 4 \cdot 5(-2)^2 = 240, \\
 f^{IV}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x, & f^{IV}(-2) & = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(-2) = 240.
 \end{array}$$

Das TAYLOR-Polynom von f von der Ordnung 4 ist also:

$$-32 + \frac{1}{1!}80x + \frac{1}{2!}(-160)x^2 + \frac{1}{3!}240x^3 + \frac{1}{4!}240x^4 .$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit dem Horner-Schema:

	1	0	0	0	0	0
-2	1	-2	4	-8	16	-32
-2	1	-4	12	-32	80	
-2	1	-6	24	80		
-2	1	-8	40			
-2	1	-10				

Wir lesen das TAYLOR-Polynom ab:

$$\boxed{-32} + \boxed{80}(x+2) + \boxed{80}(x+2)^2 + \boxed{40}(x+2)^3 + \boxed{-10}(x+2)^4 .$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit maple:

> f := x^5 ;

$$f := x^5$$

> taylor(f , x=-2 , 5);

$$-32 + 80(x+2) - 80(x+2)^2 + 40(x+2)^3 - 10(x+2)^4 + 0((x+2)^5)$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Substitution $x = -2 + h$

$$\begin{aligned} f(x) &= (-2 + h)^5 \\ &= \binom{5}{0}(-2)^5 + \binom{5}{1}(-2)^4h + \binom{5}{2}(-2)^3h^2 + \binom{5}{3}(-2)^2h^3 + \binom{5}{4}(-2)h^4 + \mathcal{O}(h^5) \\ &= (-2)^5 + 5(-2)^4h + 10(-2)^3h^2 + 10(-2)^2h^3 + 5(-2)h^4 + \mathcal{O}(h^5) \dots \end{aligned}$$

Alternativ kann man mit maple nach gleicher Idee vorgehen:

> f := x^5 ;

$$f := x^5$$

> T := subs(x=-2+h , f);

$$T := (-2 + h)^5$$

> expand(T);

$$-32 + 80 h - 80 h^2 + 40 h^3 - 10 h^4 + h^5$$



Aufgabe 14

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 8 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sin(1 - \cos(x)) , \quad x \in I .$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(1 - \cos(x)) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}(x^9)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}(x^9)\right) \\ &\quad - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}\left(\mathcal{O}(x^2)\right)^5 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^9) \\ &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8\right) \\ &\quad - \frac{1}{3!}\left(\binom{3}{0}\frac{1}{2!^3}(x^2)^3 - \binom{3}{1}\frac{1}{2!^2}(x^2)^2\left(\frac{1}{4!}x^4\right)^1 + \mathcal{O}(x^9)\right)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^9) \\ &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{3!}\binom{3}{0}\frac{1}{2!^3}\right)x^6 + \left(-\frac{1}{8!} + \frac{1}{3!}\binom{3}{1}\frac{1}{2!^2}\frac{1}{4!}\right)x^8 + \mathcal{O}(x^9) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{7}{360}x^6 + \frac{209}{40320}x^8 + \mathcal{O}(x^9). \end{aligned}$$

■

> taylor(sin(1-cos(x)) , x=0 , 9);

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{7}{360}x^6 + \frac{209}{40320}x^8 + \mathcal{O}(x^9)$$

Aufgabe 15

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 4 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x \exp(-x^2), \quad x \in I.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &:= x \exp(-x^2) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \mathcal{O}(x^5)\right) \\ &= x - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x - x^3 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned}$$

Das TAYLOR-Polynom der Ordnung 4 ist also:

$$T(x) = x - x^3.$$

■

```
> taylor( x*exp(-x^2) , x=0 , 5 );
      3      5
x - x  + O(x )
```

Aufgabe 16

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 3 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare)

Funktion $f : I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)} \\ &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4). \\ \frac{1-y}{1+y} &= (1-y) \frac{1}{1+y} = (1-y)(1-y+y^2-y^3+\mathcal{O}(y^4)) \\ &= 1 - 2y + 2y^2 - 2y^3 + \mathcal{O}(y^4). \end{aligned}$$

setzt man nun für y die TAYLOR-Entwicklung für $\tan x$ ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \\ &= 1 - 2(\tan x) + 2(\tan x)^2 - 2(\tan x)^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + 2x^2 - 2x^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

■

```
> taylor( (1-tan(x))/(1+tan(x)) , x=0 , 4 );
      2      3      4
1 - 2 x + 2 x  - 8/3 x  + O(x )
```

Aufgabe 17

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 10 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare)

Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1 + x - 2x^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Zuerst wird die Partialbruchzerlegung für $f(x)$ durchgeführt:

> f := 1/(1+x-2*x^2) ;

$$f := \frac{1}{1 + x - 2x^2}$$

> convert(f , parfrac , x);

$$\frac{2}{3} \frac{1}{2x + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1}$$

Wir verwenden direkt diese Ergebnisse:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{1 + x - 2x^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - x} \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots + 1024x^{10}) \\ &\quad + \frac{1}{3} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}) + \mathcal{O}(x^{10}) \\ &= \frac{1}{3} \left((2 + 1) + (-4 + 1)x + (8 + 1)x^2 + (-16 + 1)x^3 + \dots + (2048 + 1)x^{10} \right) + \mathcal{O}(x^{10}) = \dots \end{aligned}$$

■

> taylor(f , x=0 , 11);

$$1 - x + 3x^2 - 5x^3 + 11x^4 - 21x^5 + 43x^6 - 85x^7 + 171x^8 - 341x^9 + 683x^{10} + \mathcal{O}(x^{11})$$

Aufgabe 18

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 5 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{3 - 7x + 4x^3}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Zuerst wird die Partialbruchzerlegung für $f(x)$ durchgeführt:

> f := 1/(3-7*x+4*x^3) ;

$$f := \frac{1}{3 - 7x + 4x^3}$$

> convert(f , parfrac , x);

$$\frac{1}{5} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{10} \frac{1}{2x + 3} - \frac{1}{2} \frac{1}{2x - 1}$$

Wir verwenden direkt diese Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= \frac{1}{3-7x+4x^3} \\
 &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} \\
 &= -\frac{1}{5} (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\
 &\quad + \frac{1}{30} \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{16}{81}x^4 - \frac{32}{243}x^5 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1-2x+4x^2-8x^3+16x^4-32x^5) + \mathcal{O}(x^6).
 \end{aligned}$$

■

> taylor(f , x=0 , 6);

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{9}x + \frac{49}{27}x^2 + \frac{307}{81}x^3 + \frac{1897}{243}x^4 + \frac{11515}{729}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

Aufgabe 19

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Es gilt $f(x) = (1+x)^{-2}$.

Wir beweisen durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) := [\quad \text{Es gilt } f^{(n)}(x) = (n+1)!(-1)^n(1+x)^{-(n+2)} \quad].$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr: Die "nullte" Ableitung von f ist die Funktion f selbst, also gilt: $f^{(0)}(x) = f(x) = (1+x)^{-2} = 1!(-1)^0(1+x)^{-(0+2)}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [(n+1)!(-1)^n(1+x)^{-(n+2)}]' \\
 &= (n+1)!(-1)^n \cdot (-(n+2))(1+x)^{-(n+2)-1} \\
 &= (n+2)!(-1)^{n+1}(1+x)^{-(n+3)}.
 \end{aligned}$$

So ist die Aussage $A(n+1)$ auch wahr.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Es gilt insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = (n+1)!(-1)^n(1+0)^{-n-2} = (n+1)!(-1)^n.$$

Das gesuchte TAYLOR-Polynom ist also:

$$\begin{aligned}
 T_p(x) &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} (-1)^k (k+1)! x^k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k (k+1) x^k.
 \end{aligned}$$

■

Ein maple-Beispiel dazu:

```
> taylor( 1/(1+x)^2 , x=0 , 9 );
      2      3      4      5      6      7      8      9
1 - 2 x + 3 x - 4 x + 5 x - 6 x + 7 x - 8 x + 9 x + 0(x )
```

Aufgabe 20

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^3}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Es gilt $f(x) = (1+x)^{-3}$.

Wir beweisen durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) := [\quad \text{Es gilt } f^{(n)}(x) = \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n (1+x)^{-(n+3)} \quad] .$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr: Die “nullte” Ableitung von f ist die Funktion f selbst, also gilt: $f^{(0)}(x) = f(x) = (1+x)^{-3} = \frac{2!}{2!} (-1)^0 (1+x)^{-(0+3)}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [\frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n (1+x)^{-(n+3)}]' \\ &= \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n \cdot (-(n+3)) (1+x)^{-(n+3)-1} \\ &= \frac{(n+3)!}{2!} (-1)^{n+1} (1+x)^{-(n+3)}. \end{aligned}$$

So ist die Aussage $A(n+1)$ auch wahr.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Es gilt insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n (1+0)^{-(n+3)} = \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n .$$

Das gesuchte TAYLOR–Polynom ist also:

$$\begin{aligned} T_p(x) &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) (x-0)^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} (-1)^k \frac{(k+2)!}{2!} x^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} x^k . \end{aligned}$$

Ein maple–Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1+x)^3 , x=0 , 9 );
      2      3      4      5      6      7      8      9
1 - 3 x + 6 x - 10 x + 15 x - 21 x + 28 x - 36 x + 45 x + 0(x )
```

Aufgabe 21

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 10 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(1+3x^2)^3}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: In der letzten Aufgabe haben wir gezeigt, dass gilt:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - 3y + 6y^2 - 10y^3 + 15y^4 - 21y^5 + \mathcal{O}(y^6).$$

Wir setzen nun für y den Wert $y = 3x^2$ ein und bekommen:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{(1+3x^2)^3} \\ &= 1 - 3(3x^2) + 6(3x^2)^2 - 10(3x^2)^3 + 15(3x^2)^4 - 21(3x^2)^5 + \mathcal{O}(x^{11}) \\ &= 1 - 9x^2 + 54x^4 - 270x^6 + 1215x^8 - 5103x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}). \end{aligned}$$

■

```
> taylor( 1/(1+3*x^2)^3 , x=0 , 11 );  
      2      4      6      8      10      12  
1 - 9 x  + 54 x  - 270 x  + 1215 x  - 5103 x  + 0(x  )
```

Kapitel 2

Der Satz von l'Hospital

2.1 Theorie

Proposition 22 (l'Hospital – der Fall $\frac{0}{0}$) Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Sei $a \in I'$ ein (endlicher oder unendlicher) Berührungspunkt von I . Dies bedeutet für $a \in \mathbb{R}$ (a endlich), dass I für ein geeignetes $\epsilon > 0$ ein Unterintervall von der Form

$$(a - \epsilon, a) \quad \text{oder} \quad (a, a + \epsilon) \quad \text{oder} \quad (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

beinhaltet. Für ein unendliches $a = \pm\infty$ bedeutet dies, dass I ein Intervall von der Form $(?, \infty)$ oder $(-\infty, ??)$ ist.

Seien

$$f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen. Wir nehmen an, dass folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

- Es existieren die Grenzwerte $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = 0$.
- Die Funktionen f, g sind auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar.
- Die Funktion g nimmt auf $I \setminus \{a\}$ den Wert Null **nicht** an.
- Es existiert der (endliche oder unendliche) Grenzwert $l := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

Dann existiert der (endliche oder unendliche) Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} \in [-\infty, +\infty]$ und es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Proposition 23 (l'Hospital – der Fall $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Sei $a \in I'$ ein (endlicher oder unendlicher) Berührungspunkt von I .

Seien

$$f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen. Wir nehmen an, dass folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert der Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} |g(x)| = \infty$.
- Die Funktionen f, g sind auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar.
- Die Funktion g nimmt auf $I \setminus \{a\}$ den Wert Null **nicht** an.
- Es existiert der (endliche oder unendliche) Grenzwert $l := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$. **Dann existiert**

der (endliche oder unendliche) Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} \in [-\infty, +\infty]$ und es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l .$$

2.2 Anwendungen des Satzes von l'Hospital in den unbestimmten Fällen $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0

2.2.1 Der Fall $\infty - \infty$

Der Fall $\infty - \infty$ reduziert sich oft auf den Fall $\frac{0}{0}$ durch die Gleichheit:

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} .$$

(Dabei sind f, g geeignete Funktionen mit $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = \infty$.) Falls etwa $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt, dann ist die Umformung

$$f - g = \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$$

leichter handzuhaben.

2.2.2 Der Fall $\infty \cdot 0$

Der Fall $\infty \cdot 0$ reduziert sich auf den Fall $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ durch die Gleichheit:

$$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{oder} \quad fg = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

(Dabei sind f, g geeignete Funktionen mit $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \infty$, und $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = 0$.)

2.2.3 Die Fälle 1^∞ , 0^0 , ∞^0

Durch die Gleichheit:

$$f^g = (\exp(\ln f))^g = (e^{\ln f})^g = e^{g \ln f}$$

und die Stetigkeit der Exponential-Funktion kann man diese Fälle auf bereits behandelte Fälle reduzieren.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 24

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+a}{x} \right)$.

LÖSUNG: Es handelt sich um den Fall $\infty - \infty$. Seien f, g die Funktionen $f, g : (2002, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x, \quad g(x) := x^2 \ln \frac{x+a}{x}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

In der Aufgabe handelt sich eventuell um den "konsistenten Fall" $\infty - \infty$, da der Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+a}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{und weiter mit L'HOSPITAL} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= a. \end{aligned}$$

(Der konsistente Fall kommt also nur im Falle $a = 1$ vor.)

> f := x ;

f := x

> g := x^2*ln(1+a/x) ;

g := x^2 ln(1 + a/x)

> limit(g/f , x=infinity);

a

Wir berechnen des weiteren standardmässig:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Der Zähler konvergiert gegen $1 - a$, der Nenner (mit positiven Werten) gegen Null. Aus diesem Grund ist der Grenzwert gleich $+\infty$ im Falle $a < 1$ und $-\infty$ im Falle $a > 1$. Im Falle $a = 1$ handelt es sich in $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ um den Fall $\frac{0}{0}$. Wir wenden dann den Satz von L'HOSPITAL nach geeigneter Umformung an und bekommen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, kann angewandt werden:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]'}{\left[\frac{1}{x^2} \right]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-2\frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1}}{-2\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+a}{x} \right) = \begin{cases} +\infty & a < 1 \\ 1/2 & a = 1 \\ -\infty & a > 1 \end{cases}$$

■

```
> f := x ; g := x^2*ln(1+a/x) ;
      f := x
      2
      g := x ln(1 + a/x)
> limit( f-g , x=infinity ) ;
      -signum(-1 + a) infinity
```

und speziell im Falle a=1:

```
> f := x ; g := x^2*ln(1+1/x) ; limit( f-g , x=infinity ) ;
      f := x
      2
      g := x ln(1 + 1/x)
      1/2
```

2. Lösung Wir betrachten nur den Fall $a = 1$. Durch die Substitution $x = 1/h$, $h = 1/x$ und der Verwendung der TAYLOR-Entwicklung:

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \dots \pm \frac{h^p}{p} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

haben wir sofort:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \ln(1+h) \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \left(h - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3) \right) \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} - \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h) \right) \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

■

Aufgabe 25

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$
mittels der Taylor-Polynome,
mittels des Satzes von l'Hospital.

LÖSUNG:

Lösung durch Verwendung der Taylor-Polynome: Wir haben bereits die Entwicklung mehrmals festgestellt:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4) .$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2} \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) - 1}{1 + \mathcal{O}(x)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\frac{2}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{1 + \mathcal{O}(x)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x)} = \frac{2}{3} + \mathcal{O}(x). \end{aligned}$$

Der gesuchte Grenzwert ist also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \frac{2}{3}.$$

```
> limit( x^(-2) - tan(x)^(-2) , x=0 );
      2/3
```

Lösung durch den Satz von l'Hospital:

In dieser Lösung berechnen wir für

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}$$

die ersten Ableitungen der Zähler- bzw. Nenner-Funktionen f bzw. g , bis der Wert einer/beider Ableitungen in 0 nicht mehr verschwindet. Es gilt in diesem Sinne:

```
f := tan(x)^2 - x^2 ;
g := x^2 * tan(x)^2 ;
for n from 1 to 4 do
  print( diff(f,x$n) , diff(g,x$n) );
  print( simplify[trig](subs( x=0 , diff(f,x$n) ) ) ,
        simplify[trig](subs( x=0 , diff(g,x$n) ) ) );
od:
```

```
      2      2      2      2
2 tan(x) (1 + tan(x) ) - 2 x , 2 x tan(x) + 2 x tan(x) (1 + tan(x) )
      0, 0
      2 2      2      2      2
2 (1 + tan(x) ) + 4 tan(x) (1 + tan(x) ) - 2, 2 tan(x)
      2      2      2 2
+ 8 x tan(x) (1 + tan(x) ) + 2 x (1 + tan(x) )
      2      2      2
+ 4 x tan(x) (1 + tan(x) )
      0, 0
      2 2      3      2      2
16 (1 + tan(x) ) tan(x) + 8 tan(x) (1 + tan(x) ) , 12 tan(x) (1 + tan(x) )
      2 2      2      2
+ 12 x (1 + tan(x) ) + 24 x tan(x) (1 + tan(x) )
```

$$\begin{aligned}
& + 16 x^2 (1 + \tan(x))^2 \tan(x) + 8 x^3 \tan(x) (1 + \tan(x))^2 \\
& 0, 0 \\
& 88 (1 + \tan(x))^2 \tan(x)^2 + 16 (1 + \tan(x))^2 \tan(x)^3 + 16 \tan(x)^4 (1 + \tan(x))^2, \\
& 24 (1 + \tan(x))^2 + 48 \tan(x)^2 (1 + \tan(x))^2 + 128 x (1 + \tan(x))^2 \tan(x) \\
& + 64 x^3 \tan(x) (1 + \tan(x))^2 + 88 x^2 (1 + \tan(x))^2 \tan(x) \\
& + 16 x^2 (1 + \tan(x))^2 \tan(x)^3 + 16 x^4 \tan(x)^2 (1 + \tan(x))^2 \\
& 16, 24
\end{aligned}$$

Die wiederholte Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL ist dann ("möglich"):

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(IV)}(x)}{g^{(IV)}(x)} = \frac{f^{(IV)}(0)}{g^{(IV)}(0)} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 26

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}$
mittels der Taylor-Polynome,
mittels des Satzes von l'Hospital.

LÖSUNG:

Lösung durch Verwendung der Taylor-Polynome: Diese Lösung ist erneut die einfachere Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right)^n}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^n\right]}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^n}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} \cdot \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{3!} + \mathcal{O}(x) = \frac{n}{6}
\end{aligned}$$

■

Es gilt zum Beispiel:

```
> n := 7 ; limit( ( x^n -sin(x)^n )/x^(n+2) , x=0 );
n := 7
```

7/6

Lösung durch den Satz von l'Hospital (und Umformung):

Wir bemerken zuerst die Relation:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 .$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \left[1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \right]}{x^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n}{x^2}$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, kann nun angewandt werden. (Der Zähler konvergiert gegen $1 - 1^n = 1 - 1 = 0$.)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \right]'}{\left[x^2 \right]'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-n \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{n-1} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} \\ &= n \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{n-1}}_{=1^{n-1}=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{2x^3} \\ &= \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \end{aligned}$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, kann nun angewandt werden.

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - x \cos x]'}{[x^3]'} = \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x \sin x - \cos x}{3x^2} = \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{n}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{n}{6} . \end{aligned}$$

■

Aufgabe 27

Seien $a, b > 0$. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right)$

LÖSUNG:

Falls $a = b$ gilt, dann ist der gesuchte Grenzwert gleich Null.

Wir nehmen aus diesem Grund $a \neq b$ an.

Nach Umformung und Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(1-x^b) - b(1-x^a)}{(1-x^a)(1-x^b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[a(1-x^b) - b(1-x^a)]'}{[(1-x^a)(1-x^b)]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ab(x^{a-1} - x^{b-1})}{-ax^{a-1} - bx^{b-1} + (a+b)x^{a+b-1}} \\ &= ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - x^b}{-ax^a - bx^b + (a+b)x^{a+b}} \end{aligned}$$

(Der letzte Schritt ist nur psychologisch von Bedeutung ...)

$$= ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^a - x^b)/x^b}{(-ax^a - bx^b + (a+b)x^{a+b})/x^b} = ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{a-b} - 1}{-ax^{a-b} - b + (a+b)x^a}$$

und nach Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, erhalten wir:

$$= ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a-b)x^{a-b-1}}{-a(a-b)x^{a-b-1} + a(a+b)x^{a-1}} = ab \frac{a-b}{-a(a-b) + a(a+b)} = ab \frac{a-b}{2ab} = a-b.$$

> a:=2002; b:=2001;

a := 2002

b := 2001

> limit(a/(1-x^a) - b/(1-x^b) , x=0);

1

Aufgabe 28

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2}$

LÖSUNG:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{(nx)^2}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{(nx)^2}{2}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2} - \dots - \frac{(nx)^2}{2}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(2x)^2}{2} + \dots + \frac{(nx)^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + \mathcal{O}(x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \mathcal{O}(x). \end{aligned}$$

Es folgt sofort:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2} = \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1).$$

■

Aufgabe 29

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \dots \cdot \sin(nx)}{x^{n+2}}$

LÖSUNG:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{n!x^n - \sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \dots \cdot \sin(nx)}{x^{n+2}} \\
 &= \frac{1}{x^{n+2}} \left[n!x^n - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \left((2x) - \frac{(2x)^3}{3!}\right) \dots \left((nx) - \frac{(nx)^3}{3!}\right) + \mathcal{O}(x^{n+3}) \right] \\
 &= \frac{1}{x^{n+2}} \cdot n!x^n \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{3!}\right) \dots \left(1 - \frac{(nx)^2}{3!}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\
 &= \frac{1}{x^2} n! \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{3!} - \frac{(2x)^2}{3!} - \dots - \frac{(nx)^2}{3!}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\
 &= \frac{1}{x^2} n! \left[\frac{x^2}{3!} + \frac{(2x)^2}{3!} + \dots + \frac{(nx)^2}{3!} + \mathcal{O}(x^3) \right] \\
 &= \frac{n!}{3!} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + \mathcal{O}(x) \\
 &= \frac{n!}{6} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \mathcal{O}(x) .
 \end{aligned}$$

Es folgt sofort:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2} = \frac{n!}{36} n(n+1)(2n+1) .$$

Es gilt zum Beispiel:

```
f := ( 5!*x^5 - sin(x)*sin(2*x)*sin(3*x)*sin(4*x)*sin(5*x) )/x^7 ;
limit( f , x=0 );
result := 5!/36 * 5*6*11;
```

$$f := \frac{5 \cdot 120 x^5 - \sin(x) \sin(2 x) \sin(3 x) \sin(4 x) \sin(5 x)}{x^7}$$

```
> limit( f , x=0 );
```

1100

```
result := 1100
```

Aufgabe 30

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e - \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x \right]$

LÖSUNG:

```
f := x*( exp(1) - (1+1/(x+1))^x );
limit(f , x=infinity );
```

```
> f := x*( exp(1) - (1+1/(x+1))^x );
```

$$f := x \left| \exp(1) - \left| 1 + \frac{1}{x+1} \right|^x \right|$$

```
> limit(f , x=infinity );
```

3/2 exp(1)

Aufgabe 31

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8)^{1/2} - (x+242)^{1/5}}{(x+3)^{1/2} - (x+31)^{1/5}}$.

LÖSUNG:

Diese ist eine typische Aufgabe, welche durch die einfache Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL schnell zum Ergebnis führt: Seien:

$$f(x) := (x+8)^{1/2} - (x+242)^{1/5}, g(x) := (x+3)^{1/2} - (x+31)^{1/5}.$$

Dann gilt $f(1) = g(1) = 0$ und:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+8)^{-1/2} - \frac{1}{5}(x+242)^{-4/5}, g'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} - \frac{1}{5}(x+31)^{-4/5}.$$

Die Werte der zwei Ableitungen an der Stelle 1 sind:

$$f'(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4},$$
$$g'(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4}.$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$ ist also anwendbar und wir bekommen:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^4}} = \frac{56}{81}.$$

```
f := ( (x+8)^(1/2)-(x+242)^(1/5) ) / ( (x+3)^(1/2)-(x+31)^(1/5) );
simplify( limit(f , x=1 ) );
```

```
> f := ( (x+8)^(1/2)-(x+242)^(1/5) ) / ( (x+3)^(1/2)-(x+31)^(1/5) );
```

$$f := \frac{(x+8)^{1/2} - (x+242)^{1/5}}{(x+3)^{1/2} - (x+31)^{1/5}}$$

```
> simplify( limit(f , x=1 ) );
```

56
--
81

Aufgabe 32

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \tan^a x)^{1/(\sin x - \cos x)}$.

LÖSUNG:

```
f := (2-tan(x)^a)^(1/(sin(x)-cos(x)));
limit( f , x=Pi/4 );
```

```

> f := (2-tan(x)^a)^(1/(sin(x)-cos(x))) ;
                                     /      1      \
                                     |-----|
                                     \sin(x) - cos(x)/
                                     a
f := (2 - tan(x) )

> limit( f , x=Pi/4 ) ;
                                     1/2
                                     exp(-a 2 )

```

■

Aufgabe 33

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x - \sin^3(\sin x) - \frac{1}{2}x^5}{x^7}$.

LÖSUNG:

```

taylor( x^3*cos(x) , x=0 , 8 );
taylor( sin(sin(x))^3 , x=0 , 8 );
taylor( x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2 , x=0 , 8 );
limit( (x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2) / (x^7) , x=0 );

> taylor( x^3*cos(x) , x=0 , 8 );
      3      5      7      9
x  - 1/2 x  + 1/24 x  + 0(x )

> taylor( sin(sin(x))^3 , x=0 , 8 );
      3      5      19      7      9
x  - x  + --- x  + 0(x )
      30

> taylor( x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2 , x=0 , 8 );
      71      7      9
- --- x  + 0(x )
      120

> limit( (x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2) / (x^7) , x=0 );
      -71
      ---
      120

```

■

Kapitel 3

Untersuchung der lokalen Extrema mit Hilfe der Ableitungen

3.1 Theorie

Proposition 34 Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} .

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse $C^p(I)$, $p \geq 2$.

Sei $x_0 \in I$ eine Stelle.

Falls x_0 eine strikte lokale Extremstelle für das TAYLOR-Polynom $T_p(x)$ ist, **dann** ist x_0 auch eine strikte lokale Extremstelle für f .

Falls x_0 eine strikte lokale Wendestelle für das TAYLOR-Polynom $T_p(x)$ ist, **dann** ist x_0 auch eine strikte lokale Wendestelle für f .

Insbesondere:

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ ist, dann hat das TAYLOR-Polynom

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

ein striktes lokales Extremum an der Stelle x_0 , also auch die Funktion f .

Insbesondere allgemeiner:

Falls $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(p)}(x_0) \neq 0$ ist, dann hat das TAYLOR-Polynom

$$T_p(x) = f(x_0) + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0)(x - x_0)^p$$

ein striktes lokales Extremum an der Stelle x_0 für gerades p und eine strikte lokale Wendestelle für ungerades p .

Entsprechendes gilt also auch für die Funktion f .

3.2 Aufgaben

Aufgabe 35

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x \exp(-x^2/2)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

LÖSUNG: Die ersten Ableitungen von f sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(x^2 - 1) \exp(-x^2/2), \\ f''(x) &= (x^3 - 3x) \exp(-x^2/2). \end{aligned}$$

- Die einzige Nullstelle von f ist $a = 0$.
 - Die einzigen Nullstellen von f' sind $b_1 = -1$ und $b_2 = 1$.
 - Die einzigen Nullstellen von f'' sind $c_1 = -\sqrt{3}$, $c_2 = a = 0$ und $c_3 = \sqrt{3}$. Die Tabelle zur Funktion f ist:
-

Aufgabe 36

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \left(\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right)^{1/2}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 37

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x + \sin x$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 38

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := (x + 1) \exp(-x^2)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 39

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{1 + x^2} \exp(-x^2)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 40

Untersuchen Sie die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 1)(x + 7)^2}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.
Dabei ist I das maximale Definitionsbereich von f in \mathbb{R} .

Aufgabe 41

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x(x + 1)(x + 5)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 42

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x(x+1)(x+5)(x+6)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 43

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 44

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 45

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 46

Untersuchen Sie die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 47

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 48

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Kapitel 4

Integrale

4.1 Theorie

Proposition 49 Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Dann existiert eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$F' = f .$$

Definition 50 Eine Funktion F wird **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f genannt und mit

$$\int f(x) dx$$

bezeichnet, falls F differenzierbar ist und die Relation gilt:

$$F' = f .$$

Proposition 51 Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Seien $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f . Dann ist die Differenz-Funktion

$$F_1 - F_2$$

eine konstante Funktion.

Observation 52 Falls I eine Vereinigung von mehreren disjunkten Intervallen ist, dann unterscheiden sich zwei Stammfunktionen einer stetigen Funktion f auf I (nicht unbedingt durch eine konstante Funktion aber) durch eine Funktion, welche auf jedem Teilintervall von I konstant ist.

Proposition 53 Sei $I = [a, b]$ ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann hängt die Differenz

$$F(b) - F(a)$$

nicht von der Wahl der Stammfunktion F ab. Diese Differenz wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet.

Proposition 54 (Partielle Integration) Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf I . Dann gilt:

$$\int f'(x)g(x) dx = (fg)(x) - \int f(x)g'(x) dx .$$

Proposition 55 (Partielle Integration) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall in \mathbb{R} . Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf I . Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx .$$

Dabei steht $[fg]_a^b$ für die Differenz $(fg)(b) - (fg)(a)$.

4.2 Standard-Integrale

Die folgenden Funktionen f haben auf dem maximalen Definitionsbereich D die Stammfunktion F . Man kann dies durch den einfacheren Prozess der Ableitung leicht nachprüfen.

f	F	$x \in D$	
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + \mathcal{C}$	$x \in (0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ beliebig
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$ oder $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ beliebig
x^{-1}	$\ln x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$\sin x$	$-\cos x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\exp x$	$\exp x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$

4.3 Standard-Integrationstechniken

Es gibt eine unendliche Liste \mathcal{L} von Funktionen, welche ausgehend von den Standard-Funktionen (polynomiale Funktionen, \sin , \cos , \exp , ...) durch wiederholte Bildung von Summen, Differenzen, Produkten, Verkettungen, Umkehrfunktionen entstehen. Man kann leicht beweisen, dass die Ableitung einer Funktion aus dieser Liste \mathcal{L} auch in \mathcal{L} liegt.

Diese Liste ist jedoch **nicht** abgeschlossen bzgl. der Integralbildung.

Die Stammfunktion der Funktion $x \rightarrow \exp(-x^2)$, welche offensichtlich zur Liste \mathcal{L} gehört, ist nicht in \mathcal{L} , und die einfachste Bezeichnung für eine Stammfunktion ist:

$$x \rightarrow \int_{-\infty}^x \exp(-t^2) dt + \mathcal{C} .$$

Aus diesem Grund ist es wichtig zu wissen, welche Typen von Funktionen integriert werden können.

4.3.1 Rationale Funktionen

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei polynomiale Funktionen, welche auf dem Intervall I definiert sind, so dass g keine Nullstellen in I zulässt. Dann ist die Quotientenfunktion $R : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$R(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

wohldefiniert. Jede Funktion von diesem Typ wird **rational Funktion** genannt.

Für die Zwecke der Untersuchung der Stammfunktion von R können wir zuerst annehmen, dass der Grad von f streng kleiner als der Grad von g ist. (Sonst kann man sich durch die Division mit Rest für Polynome und polynomiale Funktionen auf diesen Fall reduzieren.)

Die Integration einer rationalen Funktion wird in den folgenden Schritten erzielt:

- Man findet alle reellen und komplexen Nullstellen von g . Dieser Schritt ist bereits nicht algorithmisch: Es gibt keine allgemeine Formel für die Nullstellen der Polynome mit Grad größer oder gleich fünf. Spezielle Polynome mit **ganzen** Koeffizienten können nach rationalen Nullstellen untersucht werden. Die rationalen Nullstellen eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten sind immer von der Form:

$$\pm \frac{\text{Teiler des freien Koeffizienten}}{\text{Teiler des Haupt-Koeffizienten}} .$$

Die Suche nach solche Nullstellen kann algorithmisch gestaltet werden.

Seien a_1, \dots, a_k die **verschiedenen reellen** Nullstellen von g , welche mit gewissen Vielfachheiten (Multiplizitäten) ν_1, \dots, ν_k vorkommen, so dass gilt:

$$g(X) = (X - a_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (X - a_k)^{\nu_k} \cdot q(X) ,$$

so dass $q(X)$ nur komplexe Nullstellen zulässt. Diese Nullstellen kommen dann in komplex konjugierten Paaren (– wenn überhaupt –) von der Form $\beta + i\gamma, \beta - i\gamma, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, vor. Die Vielfachheiten μ von $\beta + i\gamma$ und $\beta - i\gamma$ stimmen überein.

Das Produkt $(X - (\beta + i\gamma))(X - (\beta - i\gamma))$ ist dann das **reelle** Polynom

$$X^2 - 2\beta X + (\beta^2 + \gamma^2) =: X^2 + bX + c$$

für geeignete reelle Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$.

Man hat also eine Produkt-Darstellung für g

$$g(X) = (X - a_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (X - a_k)^{\nu_k} \cdot (X^2 + b_1X + c_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (X^2 + b_lX + c_l)^{\mu_l} ,$$

welche in reellen Polynomen nicht mehr weiter faktorisiert (zerlegt) werden kann.

- **[Partialbruchzerlegung]** Man kann dann die rationale Funktion $R(X)$ als lineare Kombination der "elementaren" rationalen Funktionen schreiben:

$$\frac{1}{(X - a_1)^1} ; \frac{1}{(X - a_1)^2} ; \dots ; \frac{1}{(X - a_1)^{\nu_1}} ;$$

.....

$$\frac{1}{(X - a_k)^1} ; \frac{1}{(X - a_k)^2} ; \dots ; \frac{1}{(X - a_k)^{\nu_k}} ;$$

$$\frac{1}{(X^2 + b_1X + c_1)^1} , \frac{X}{(X^2 + b_1X + c_1)^1} ; \dots ; \frac{1}{(X^2 + b_1X + c_1)^{\mu_1}} , \frac{X}{(X^2 + b_1X + c_1)^{\mu_1}} ;$$

.....

$$\frac{1}{(X^2 + b_lX + c_l)^1} , \frac{X}{(X^2 + b_lX + c_l)^1} ; \dots ; \frac{1}{(X^2 + b_lX + c_l)^{\mu_l}} , \frac{X}{(X^2 + b_lX + c_l)^{\mu_l}} .$$

Die Integration der rationalen Funktion $R(X)$ reduziert sich auf die Integration der rationalen Funktionen in der obigen Liste.

- Das Integral obigen Funktionen, welche vom Typ

$$\frac{1}{(X - a)^n} = (X - a)^{-n}$$

sind ist leicht: Eine Stammfunktion ist z.B.

$$\frac{1}{1-n} (X - a)^{1-n} \text{ für } n \neq 1 \quad \text{oder} \quad \ln |X - a| \text{ für } n = 1 .$$

- Durch eine eventuelle geeignete Substitution (quadratische Erweiterung in $(X^2 + bX + c)$) reduziert sich des weiteren das Integral jeder der restlichen rationalen Funktionen auf das Integral eine Funktion von der Form:

$$\frac{1}{(X^2 + a^2)^n} \quad \text{oder} \quad \frac{X}{(X^2 + a^2)^n} .$$

Das zweite Integral lässt sich sofort mit einer Substitution $y = x^2$ berechnen:

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{dy}{(y + a^2)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} (y + a^2)^{1-n} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} (x^2 + a^2)^{1-n} + C .$$

Das erste Integral ist schwieriger zu berechnen. Wir führen die Notation ein:

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} .$$

Das Integral I_1 ist ein Standard-Integral, das arctan ins Spiel bringt.

Für $n \geq 2$ hat man eine Rekursionsformel, welche durch partielle Integration hergeleitet wird.

Um die Verbindung zwischen I_n und I_{n+1} herzustellen, "verkomplizieren" wir durch partielle Integration die Formel von I_n :

$$\begin{aligned} I_n &:= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int x' \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = x \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \right)' dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \cdot \left((-n) \frac{2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right) dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}) . \end{aligned}$$

Wir erhalten also die rekursive Verbindung:

$$2na^2 I_{n+1} = (2n - 1)I_n + \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} .$$

4.3.2 Funktionen der Form $R(\exp x)$

Sei R eine rationale Funktion. Dann reduziert die Substitution

$$t := e^x$$

die Berechnung der Stammfunktion für $R(e^x)$ auf die Berechnung der Stammfunktion der rationalen Funktion $R(t)/t$: Es gilt formal:

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} e^x dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} d(e^x) = \int \frac{R(t)}{t} dt \dots$$

4.3.3 Funktionen der Form $R(\sin x, \cos x)$

Sei R eine rationale Funktion von zwei Variablen. Dann reduziert die Substitution

$$t := \tan \frac{x}{2}$$

die Berechnung der Stammfunktion für $R(\sin x, \cos x)$ auf die Berechnung der Stammfunktion einer anderen rationalen Funktion: Es gilt formal:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} , \\ \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} , \\ x &= 2 \arctan t , \\ dx &= \frac{2}{1 + t^2} dt , \\ \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt . \end{aligned}$$

Oft ist es möglich und dann einfacher, eine der Substitutionen $u = \sin x$, $u = \cos x$ oder $t = \tan x$ durchzuführen.

4.3.4 Funktionen der Form $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right)$

Für Integrale vom Typ $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right) dx$ mit einer rationalen Funktion R (Quotient von Polynomen in mehreren Variablen), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Substitution $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ empfehlenswert, wobei k der gemeinsame Nenner (kgV der Nenner) der Brüche q_1, \dots, q_n ist.

4.3.5 Funktionen vom Typ $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ und die eulerschen Substitutionen

Für Integrale vom Typ $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ mit einer rationalen Funktion R , $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ist eine der EULERSchen Substitutionen empfehlenswert:

- Für $a > 0$ setzt man $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.
- Für $a < 0$, $c > 0$ setzt man $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.
- Seien x_1, x_2 die Nullstellen der Funktion $x \rightarrow ax^2 + bx + c$. Man setzt $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x-x_1)$.

4.3.6 Binomische Integrale

Für Integrale vom Typ $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ mit $m, n, p \in \mathbb{Q}$ ist eine der folgenden Substitutionen empfehlenswert:

- Für $p \in \mathbb{Z}$ setzt man $x = t^q$, wobei q der gemeinsame Nenner der Brüche m, n ist.
- Für $p \notin \mathbb{Z}$, aber $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ setzt man $ax^n + b = t^s$, wobei s der Nenner der rationalen Zahl p ist.
- Für $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, aber $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ substituiert man $\frac{ax^n + b}{x^n} = a + bx^{-n} = t^s$, wobei s der Nenner der rationalen Zahl p ist.

4.4 Aufgaben

4.4.1 Integrale rationaler Funktionen

Aufgabe 56

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$ und $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

LÖSUNG: (Der Grad im Zähler des Bruches $1/(x^3 - 1)$ ist streng kleiner als der Grad im Nenner. Aus diesem Grund ist keine Division mit Rest des Zählers durch den Nenner mehr notwendig.)

Die Faktorisierung des Nenners ist:

$$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Die Partialbruchzerlegung: Wir suchen eine Zerlegung von der Form:

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

(Die Theorie sichert die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung! Aus diesem Grund reicht es aus, auszumultiplizieren und spezielle Werte einzusetzen.) Es folgt:

$$\begin{aligned}
 1 &= A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1), & \text{also} \\
 1 &= 3A, & \text{wenn wir für } x \text{ den Wert } 1 \text{ einsetzen,} \\
 1 &= A - C, & \text{wenn wir für } x \text{ den Wert } 0 \text{ einsetzen,} \\
 1 &= A + 2B - 2C, & \text{wenn wir für } x \text{ den Wert } -1 \text{ einsetzen.}
 \end{aligned}$$

Es folgt nun leicht $A = \frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$. Wir haben die Darstellung:

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} \right].$$

> f := 1/(x^3-1) ;

$$f := \frac{1}{x^3 - 1}$$

> convert(f, parfrac , x);

$$\frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$$

Die Integration von $1/(x-1)$ ist unproblematisch. Aus diesem Grund betrachten wir nur den zweiten Summanden, welcher noch in Position gebracht werden muss. Die Idee ist, den Zähler als ein Vielfaches der Ableitung des Nenners zu schreiben plus einem **konstanten** Rest. Diese Zerlegung ist: $(x + 2) = \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)' + \frac{3}{2}$. Nun können wir schließlich integrieren:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^3 - 1} &= \int \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} \right] dx \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{2} \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{3}{2} \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

maple ist manchmal bemüht, alle Nenner zusätzlich zu rationalisieren: ■

> f := 1/(x^3-1) ; int(f , x);

$$\frac{1}{3} \ln(x - 1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)$$

Das Ergebnis von maple ist **eine** Stammfunktion der Funktion $1/(x^3 - 1)$. Jede andere Stammfunktion unterscheidet sich von dieser Stammfunktion durch eine Konstante. Es ist ein Pflicht-Schikane aller Lehrer unserer Zeit, darauf zu bestehen, dass diese Konstante in der Lösung erscheint.

Aufgabe 57

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

LÖSUNG: (Der Grad 0 im Zähler des Bruches $1/(x^4 - x^2 + 1)$ ist streng kleiner als der Grad 4 im Nenner. Aus diesem Grund ist keine Division mit Rest des Zählers durch den Nenner mehr notwendig.)

Die Faktorisierung des Nenners ist:

$$\begin{aligned}(x^4 - x^2 + 1) &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{3})^2 = (x^2 + 1 + x\sqrt{3})(x^2 + 1 - x\sqrt{3}) \\ &= (x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1).\end{aligned}$$

Die Faktoren $(x^2 \pm x\sqrt{3} + 1)$ haben keine reellen Nullstellen.

Wir suchen eine Darstellung von der Form:

$$f(x) := \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}. \quad (4.1)$$

Die Theorie sichert die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung!

Wir nutzen deswegen die "Symmetrie" in der obigen Darstellung aus: Ersetzt man x mit dem Wert $-x$ so folgt daraus eine "neue" Darstellung:

$$\frac{Bx + C}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} = \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{-Bx + C}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \frac{-B'x + C'}{x^2 + x\sqrt{3} + 1}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt daraus:

$$-B = B', \quad C = C'.$$

Die Gleichung (4.1) schreibt sich also

$$\frac{1}{(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{-Bx + C}{x^2 - x\sqrt{3} + 1}$$

und nach Beseitigung des Hauptnenners $(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$:

$$1 = (Bx + C)(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + (-Bx + C)(x^2 + x\sqrt{3} + 1).$$

Nun setzen wir für x die speziellen Werte 0 und $\sqrt{3}$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned}1 &= 2C, \\ 1 &= (B\sqrt{3} + C) \cdot 1 + (-B\sqrt{3} + C) \cdot 7.\end{aligned}$$

Es folgt dann sofort: $C = 1/2$, $B = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

maple-Überprüfung:

```
factor( x^4-x^2+1 ); ## wird nicht funktionieren...
factor( x^4-x^2+1 , sqrt(3));
      ## maple erh"allt die Chance,
      ## Zerlegungen mit Wurzel 3 zu suchen
f := 1/ ( (x^2+x*sqrt(3)+1)*(x^2-x*sqrt(3)+1) );
convert( f, parfrac , x );

> factor( x^4-x^2+1 ); ## wird nicht funktionieren...
      4      2
      x  - x  + 1

> factor( x^4-x^2+1 , sqrt(3));
```

```

      2      1/2      2      1/2
      (x  + 3  x + 1) (x  - 3  x + 1)
> f := 1/ ( (x^2+x*sqrt(3)+1)*(x^2-x*sqrt(3)+1) ) ;
      1
      f := -----
      2      1/2      2      1/2
      (x  + 3  x + 1) (x  - 3  x + 1)
> convert( f, parfrac , x );
      1/2      1/2
      3 + 3  x      -3 + 3  x
1/6 ----- - 1/6 -----
      2      1/2      2      1/2
      x  + 3  x + 1      x  - 3  x + 1

```

Wir haben also die Darstellung:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left[\frac{x + \sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{-x + \sqrt{3}}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} \right].$$

Wir berechnen zuerst das Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + x\sqrt{3} + 1)'}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \arctan 2 \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3} \arctan(2x + \sqrt{3}) + C. \end{aligned}$$

Mit der Substitution von $-x$ als y in dem anderen Bruch (oder nach einer analogen Berechnung) erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x + \sqrt{3}}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} dx &= - \int \frac{(-x) + \sqrt{3}}{(-x)^2 + (-x)\sqrt{3} + 1} d(-x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln((-x)^2 + (-x)\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3} \arctan(2(-x) + \sqrt{3}) + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3} \arctan(2x - \sqrt{3}) + C. \end{aligned}$$

(Die Funktion \arctan ist ungerade, so dass gilt: $-\arctan(2(-x) + \sqrt{3}) = \arctan(-(2(-x) + \sqrt{3})) = \arctan(2x - \sqrt{3})$.)

```

> int( (x+sqrt(3)) / (x^2+x*sqrt(3)+1) , x );
      2      1/2      1/2      1/2
      1/2 ln(x  + 3  x + 1) + 3  arctan(2 x + 3  )

```

Wir können zusammenfassen und bekommen:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1} &= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) - \frac{\sqrt{3}}{12} \ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} \left[\arctan(2x + \sqrt{3}) + \arctan(2x - \sqrt{3}) \right] + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{2} \arctan \frac{(2x + \sqrt{3}) + (2x - \sqrt{3})}{1 - (2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})} + C \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{1 - x^2} + C \end{aligned}$$

Wir haben in der letzten Berechnung die Formel verwendet:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{oder für unsere Zwecke} \quad \arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv}.$$

```
f := 1/ ( (x^2+x*sqrt(3)+1)*(x^2-x*sqrt(3)+1) ) ;
J := int( f , x );
## und die Probe f"ur unsere Formel:
F := sqrt(3)/12 * ln( (x^2+x*sqrt(3)+1)/(x^2-x*sqrt(3)+1) )
    +1/2 * arctan( x/(1-x^2) );
simplify( diff( F , x ) );
```

$$f := \frac{1}{(x^2 + 3^{1/2}x + 1)(x^2 - 3^{1/2}x + 1)}$$

$$J := \frac{1}{12} 3^{1/2} \ln(x^2 + 3^{1/2}x + 1) + \frac{1}{2} \arctan(2x + 3^{1/2}) - \frac{1}{12} 3^{1/2} \ln(x^2 - 3^{1/2}x + 1) + \frac{1}{2} \arctan(2x - 3^{1/2})$$

> ## und die Probe f"ur unsere Formel:

$$F := \frac{1}{12} 3^{1/2} \ln\left(\frac{x^2 + 3^{1/2}x + 1}{x^2 - 3^{1/2}x + 1}\right) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

> simplify(diff(F , x));

$$\frac{1}{(x^2 + 3^{1/2}x + 1)(x^2 - 3^{1/2}x + 1)}$$

Aufgabe 58

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

LÖSUNG: Die Lösung dieser Aufgabe ist eine Erleichterung nach der Lösung der letzten Aufgabe. (Der Grad im Zähler des Bruches $1/(x^4 + x^2 + 1)$ ist streng kleiner als der Grad im Nenner. Aus diesem Grund ist keine Division mit Rest des Zählers durch den Nenner mehr notwendig.)

Die Faktorisierung des Nenners ist:

$$(x^4 + x^2 + 1) = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Die Faktoren $(x^2 \pm x + 1)$ haben keine reellen Nullstellen.

Wir suchen eine Darstellung von der Form:

$$f(x) := \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x + 1}. \quad (4.2)$$

Die Theorie sichert die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Darstellung!

Wir nutzen deswegen die "Symmetrie" in der obigen Darstellung aus: Ersetzt man x mit dem Wert $-x$ so folgt daraus eine "neue" Darstellung:

$$\frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{-Bx + C}{x^2 - x + 1} + \frac{-B'x + C'}{x^2 + x + 1} .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt daraus:

$$-B = B' , \quad C = C' .$$

Die Gleichung (4.1) schreibt sich also

$$\frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{-Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

und nach Beseitigung des Hauptnenners $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$:

$$1 = (Bx + C)(x^2 - x + 1) + (-Bx + C)(x^2 + x + 1) .$$

Nun setzen wir für x die speziellen Werte 0 und 1 ein und erhalten:

$$1 = 2C ,$$

$$1 = (B + C) \cdot 1 + (-B + C) \cdot 3 .$$

Es folgt dann sofort: $B = C = 1/2$. maple-Überprüfung:

```
factor( x^4+x^2+1 );
f := 1/( x^4+x^2+1 );
convert( f, parfrac , x );
```

```
> factor( x^4+x^2+1 );
```

$$(x^2 - x + 1) (x^2 + x + 1)$$

```
> f := 1/( x^4+x^2+1 );
```

$$f := \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$$

```
> convert( f, parfrac , x );
```

$$- \frac{1}{2} \frac{-1 + x}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \frac{1 + x}{x^2 + x + 1}$$

Wir haben also die Darstellung:

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{-x + 1}{x^2 - x + 1} \right] .$$

Wir berechnen zuerst das Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C . \end{aligned}$$

Mit der Substitution von $-x$ als y in dem anderen Bruch (oder nach einer analogen Berechnung) erhält man:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x+1}{x^2-x+1} dx &= - \int \frac{(-x)+1}{(-x)^2+(-x)+1} d(-x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln((-x)^2+(-x)+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2(-x)+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

(Die Funktion \arctan ist ungerade, so dass gilt: $-\arctan(2(-x)+1) = \arctan(-(2(-x)+1)) = \arctan(2x-1)$.)

```
> int( (x+1) / (x^2+x+1) , x );
      2          1/2          1/2
1/2 ln(x  + x + 1) + 1/3 3  arctan(1/3 (2 x + 1) 3  )
```

```
> int( (x-1) / (x^2-x+1) , x );
      2          1/2          1/2
1/2 ln(x  - x + 1) - 1/3 3  arctan(1/3 (2 x - 1) 3  )
```

Wir können zusammenfassen und bekommen:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} &= \frac{1}{4} \ln(x^2+x\sqrt{3}+1) - \frac{1}{4} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}} + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

Wir haben in der letzten Berechnung die Formel verwendet:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \text{oder für unsere Zwecke} \quad \arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-uv}.$$

(Hierbei entsprechen sich α und $\arctan u$ respektive β und $\arctan v$.) ■

```
f := 1/ ( (x^2+x+1)*(x^2-x+1) );
J := int( f , x );
## und die Probe f"ur unsere Formel:
F := 1/4 * ln( (x^2+x+1)/(x^2-x+1) )
    + 1/2/sqrt(3) * arctan( sqrt(3) * x/(1-x^2) );
simplify( diff( F , x ) );
```

$$f := \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$J := -\frac{1}{4} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$F := \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{6\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right)$$

$$x^2 - x + 1$$

$$1 - x$$

> simplify(diff(F , x));

$$\frac{1}{1 + x^2 + x^4}$$

Aufgabe 59

Berechnen Sie $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

LÖSUNG: Es gilt mit der Substitution $y = x^2$, $dy = 2x dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2)^2 + (x^2) + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 + y + 1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(y + \frac{1}{2}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

■

> int(x/(x^4+x^2+1) , x);

$$\frac{1}{3} \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{2}{3} \left(2x^2 + 1\right)\right)$$

Aufgabe 60

Berechnen Sie für jede der folgenden gebrochen rationalen Funktionen den maximalen Definitionsbereich in \mathbb{R} , die Partialbruchzerlegung und eine Stammfunktion:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2}, \quad \frac{-x^3 + 10x^2 - 31x + 31}{x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108}, \quad \frac{-x^4 + x^3 + x - 1}{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

LÖSUNG: **Berechnung des Integrals** $\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2} dx$

Die Faktorisierung des Nenners ist: $x^6 - 2x^4 + x^2 = x^2(x^4 - 2x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)^2 = x^2(x - 1)^2(x + 1)^2$.

Wir suchen also eine Darstellung von der Form:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{A'}{x^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{B'}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{C'}{(x + 1)^2}.$$

Die Theorie sichert die Existenz einer eindeutigen Darstellung von dieser Form. Nach Beseitigung des gemeinsamen Nenners aller Brüche bekommen wir:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 &= Ax(x - 1)^2(x + 1)^2 + A'(x - 1)^2(x + 1)^2 \\ &\quad + Bx^2(x - 1)(x + 1)^2 + B'x^2(x + 1)^2 \\ &\quad + Cx^2(x - 1)^2(x + 1) + C'x^2(x - 1)^2. \end{aligned}$$

Setzen wir in diese Polynom-Gleichheit für x die Werte $0, 1, -1$ ein, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} 1 &= A', \\ 4 &= 4B', \\ -4 &= 4C'. \end{aligned}$$

Es gilt also: $A' = 1$, $B' = 1$, $C' = -1$. Leiten wir die obige Polynom-Gleichheit nach x ab und gruppieren wir Teilausdrcke mit den Faktoren x bzw. $(x - 1)$ bzw. $(x + 1)$ so erhalten wir:

$$4x^3 + 12x^2 - 2x = A(x - 1)^2(x + 1)^2 + A' \frac{\partial[(x - 1)^2(x + 1)^2]}{\partial x} + x \cdot (\text{etwas})$$

$$4x^3 + 12x^2 - 2x = Bx^2(x + 1)^2 + B' \frac{\partial[x^2(x + 1)^2]}{\partial x} + (x - 1) \cdot (\text{etwas})$$

$$4x^3 + 12x^2 - 2x = Cx^2(x - 1)^2 + C' \frac{\partial[x^2(x - 1)^2]}{\partial x} + (x + 1) \cdot (\text{etwas}) .$$

Setzen wir in diese Polynom-Gleichheiten erneut für x respektive die Werte $0, 1, -1$ ein, so bekommen wir nach einigen Berechnungen $A = B = C = 0$. Wir erhalten also die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^2} .$$

Die Stammfunktionen sind der Form:

$$\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2} dx = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} .$$

■

```
f := (x^4+4*x^3-2*x^2+1) / (x^6-2*x^4+x^2) ;
convert( f , parfrac , x ) ;
int( f , x ) ;
```

$$f := \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2}$$

```
> convert( f , parfrac , x ) ;
```

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(-1 + x)^2} - \frac{1}{(x + 1)^2}$$

```
> int( f , x ) ;
```

$$-1/x - \frac{1}{-1 + x} + \frac{1}{x + 1}$$

Aufgabe 61

Berechnen Sie $\int \frac{x^8 + 1}{x^4 + 1} dx$.

LÖSUNG: Wir müssen zuerst eine Division mit Rest durchführen, da der Grad 8 des Zählers größer (oder gleich) zum Grad 4 des Nenners ist.

Kurz und gut kann man dabei schreiben:

$$\frac{x^8 + 1}{x^4 + 1} = \frac{(x^8 - 1) + 2}{x^4 + 1} = \frac{(x^4 - 1)(x^4 + 1) + 2}{x^4 + 1} = (x^4 - 1) + \frac{2}{x^4 + 1} .$$

Das Polynom $(x^4 - 1)$ lässt sich sofort integrieren. Wir behandeln den restlichen Bruch $2/(x^4 + 1)$:

Die Faktorisierung des Nenners ist:

$$\begin{aligned}(x^4 + 1) &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = ((x^2 + 1) + x\sqrt{2})(x^2 + 1) - x\sqrt{2}) \\ &= (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) .\end{aligned}$$

Wir suchen nun eine Partialbruchzerlegung von der Form:

$$\frac{2}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} .$$

Eine solche Zerlegung existiert und ist eindeutig. Ersetzen wir in der obigen Gleichheit x mit $-x$, so haben wir eine "neue" Darstellung:

$$\frac{-Bx + C}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{-B'x + C'}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} = \frac{2}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{B'x + C'}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} .$$

Daraus folgt:

$$-B = B' , \quad C = C' .$$

Wir suchen deswegen eine Zerlegung von der Form:

$$\frac{2}{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)} = \frac{Bx + C}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{-Bx + C}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} .$$

Nach Beseitigung der Nenner entsteht:

$$2 = (Bx + C)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (-Bx + C)(x^2 + x\sqrt{2} + 1) .$$

Wir setzen $x = 0$ ein und bekommen: $2 = 2C$, also $C = 1$.

Wir setzen $x = \sqrt{2}$ ein und bekommen:

$$2 = (B\sqrt{2} + C) \cdot 1 + (-B\sqrt{2} + C) \cdot 5 .$$

Es folgt sofort $B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Fazit:

$$\frac{2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{-x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right] .$$

```
factor( x^4+1 );
s := sqrt(2) ; factor( x^4+1 , s );
convert( 2/(x^2+x*s+1)/(x^2-x*s+1) , parfrac , x ) ;
```

```
> factor( x^4+1 );
```

$$x^4 + 1$$

```
> s := sqrt(2) ; factor( x^4+1 , s );
```

$$s := 2^{1/2}$$

$$(x^2 - 2^{1/2}x + 1)(x^2 + 2^{1/2}x + 1)$$

```
> convert( 2/(x^2+x*s+1)/(x^2-x*s+1) , parfrac , x ) ;
```

$$\frac{1}{2} \frac{-2 + 2^{1/2}x}{x^2 + 2^{1/2}x + 1} + \frac{1}{2} \frac{2 + 2^{1/2}x}{x^2 - 2^{1/2}x + 1}$$

Man berechnet des weiteren:

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x + \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + x\sqrt{2} + 1)'}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \arctan \left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} + 1) . \end{aligned}$$

Analog berechnet man:

$$\int \frac{-x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} - 1) .$$

Es folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^8 + 1}{x^4 + 1} dx &= \int (x^4 - 1) dx + \int \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} - \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right] dx \\ &= \frac{x^5}{5} - x + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) \right] + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctan(x\sqrt{2} + 1) + \arctan(x\sqrt{2} - 1) \right] + \mathcal{C} \\ &= \frac{x^5}{5} - x + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + \mathcal{C} . \end{aligned}$$

■

Der maple-Check ist:

```
> s := sqrt(2);
```

```
          1/2
s := 2
```

```
> F := x^5/5-x + s/4 * ln( (x^2+x*s+1)/(x^2-x*s+1) ) + s/2 * arctan( x*s/(1-x^2) );
```

```
          5          1/2          2          1/2          1/2          1/2
F := 1/5 x  - x + 1/4 2  ln(-----) + 1/2 2  arctan(-----)
          2          1/2          2
          x  - 2    x + 1          1 - x
```

```
> simplify( diff(F,x) );
```

```
          8
          x  + 1
-----
          2          1/2          2          1/2
(x  + 2    x + 1) (x  - 2    x + 1)
```

Aufgabe 62

Berechnen Sie $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$.

LÖSUNG: Man kann $y = x^2$ substituieren:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} (2x dx) = \frac{1}{2} \int \frac{y + 1}{y^2 + 1} dy \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{2y dy}{y^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{4} \ln(y^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan y + \mathcal{C} \\ &= \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{1}{2} \arctan(x^2) + \mathcal{C} . \end{aligned}$$

```
J := Int( (x^3+x)/(x^4+1) , x);
with(student): changevar( y=x^2 , J , y );
int( (x^3+x)/(x^4+1) , x);
```

```
> J := Int( (x^3+x)/(x^4+1) , x);
```

$$J := \int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$$

```
> with(student): changevar( y=x^2 , J , y );
Warning, new definition for D
```

$$\int \frac{y + 1}{2y^2 + 2} dy$$

```
> int( (x^3+x)/(x^4+1) , x);
```

$$\frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \arctan(x)$$

Aufgabe 63

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^6 - 1}$.

LÖSUNG: Die Faktorisierung des Nenners ist:

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Die Partialbruchzerlegung ist:

$$\frac{1}{x^6 - 1} = \frac{1}{6} \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{6} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{6} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{6} \frac{1}{x + 1}.$$

Das Integral ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6 - 1} &= \frac{1}{12} [\ln(x^2 - x + 1) - \ln(x^2 + x + 1)] \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{6} \left[\arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} [\ln|x - 1| - \ln|x + 1|] + C. \\ &= \frac{1}{12} \ln \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2} + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Aufgabe 64

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

LÖSUNG: Eine Lösungsskizze ist:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= \int \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + \mathcal{C} .\end{aligned}$$

Aufgabe 65

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

LÖSUNG: Eine Lösungsskizze ist:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2(x+1)} &= \int \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right] dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{x} - \ln|x| + \mathcal{C} .\end{aligned}$$

Aufgabe 66

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$.

LÖSUNG: Die Lösung ist:

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right] dx = -\frac{1}{x} - \arctan(x) + \mathcal{C} .$$

Aufgabe 67

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

LÖSUNG: Die Partialbruchzerlegung ist:

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} .$$

Nur der letzte Bruch ist beim Integrieren problematisch. Wir lösen das Problem in einer allgemeinen Lage: Sei:

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx , \quad n \in \mathbb{N} , n \geq 1 .$$

(In der Aufgabenstellung werden $I_1 = \arctan x + \mathcal{C}$ und I_2 benötigt.) Wir möchten für die Folge der Integrale I_1, I_2, I_3, \dots eine rekursive Formel finden.

Die Idee bei der Herleitung dieser Formel ist:

“Man verkompliziert durch partielle Integration den Ausdruck von I_n , um I_{n+1} bis auf bekannte Ingrediente zu bekommen.”

Sei also $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
I_n &:= \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \int x' \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} dx \\
&= x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} - \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2+1)^n} \right)' dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{(x^2+1) - 1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) .
\end{aligned}$$

Es folgt sofort:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n .$$

Für $n = 1$ bekommen wir also:

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan x + C .$$

Unsere Aufgabe hat also die Lösung:

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{3}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + C .$$

■

4.4.2 Integrale rational exponentieller Funktionen

Es handelt sich dabei um Integrale von Funktionen der Form $R(\exp x)$.

Aufgabe 68

Berechnen Sie $\int \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx$.

LÖSUNG: Wir substituieren $y = e^x$ und bekommen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx &= \int \frac{e^x + 1}{e^x(e^x + 2)} (e^x dx) = \int \frac{y + 1}{y(y + 2)} dy \\
&= \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y + 2} \right] dy = \frac{1}{2} [\ln |y| + \ln |y + 2|] + C \\
&= \frac{1}{2} [\ln(e^x) + \ln |e^x + 2|] + C = \frac{1}{2} [x + \ln |e^x + 2|] + C .
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 69

Berechnen Sie $\int \frac{e^x + 1}{(e^x + 2)^2} dx$.

LÖSUNG: Wir substituieren $y = e^x$ und bekommen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx &= \int \frac{e^x + 1}{e^x(e^x + 2)^2} (e^x dx) = \int \frac{y + 1}{y(y + 2)^2} dy \\
&= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{y} + \frac{2}{(y + 2)^2} - \frac{1}{y + 2} \right] dy = \frac{1}{4} \left[\ln |y| - \frac{2}{y + 2} - \ln |y + 2| \right] + C \\
&= \frac{1}{4} \left[\ln(e^x) - \frac{2}{e^x + 2} - \ln(e^x + 2) \right] + C = \frac{1}{4} \left[x - \frac{2}{e^x + 2} - \ln(e^x + 2) \right] + C .
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 70**Berechnen Sie** $\int \frac{e^x + 1}{(e^{2x} + 1)^2} dx$.LÖSUNG: Wir substituieren $y = e^x$ und bekommen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x + 1}{(e^{2x} + 1)^2} dx &= \int \frac{e^x + 1}{e^x (e^{2x} + 1)^2} (e^x dx) = \int \frac{y + 1}{y(y^2 + 1)^2} dy \\
&= \int \left[\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2 + 1} - \frac{y}{(y^2 + 1)^2} + \frac{1}{(y^2 + 1)^2} \right] dy \\
&= \ln |y| - \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y^2 + 1} + \arctan y \right) + C \\
&= x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{2} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{2} \arctan(e^x) + C .
\end{aligned}$$

■

4.4.3 Integrale trigonometrischer FunktionenEs handelt sich dabei um Integrale von Funktionen der Form $R(\sin x, \cos x)$.**Aufgabe 71****Berechnen Sie** $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.LÖSUNG: Wir machen die Standard-Substitution: $t = \tan(x/2)$ und bekommen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \frac{2t}{1+t^2} + 3} \\
&= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{(1-t^2) + 2 \cdot 2t + 3(1+t^2)}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \arctan(t+1) + C \\
&= \arctan\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) + C .
\end{aligned}$$

`int(1/(cos(x)+2*sin(x)+3) , x);``arctan(1 + tan(1/2 x))`**Aufgabe 72****Berechnen Sie** $\int \frac{\sin x}{\frac{17}{12} + \sin x + \cos x} dx$.

LÖSUNG: Sei $a := 17/12$. (Es ist eine kurze Zeitspanne einfacher, diese Abkürzung zu verwenden.) Wir substituieren $y = \tan(x/2)$ und bekommen:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{a + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{a + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{a(1+t^2) + 2t + (1-t^2)}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{4t dt}{(t^2+1)((a-1)t^2 + 2t + (a+1))} \\ &= \int \left[\frac{t+1}{t^2+1} - \frac{(a-1)t + (a+1)}{(a-1)t^2 + 2t + (a+1)} \right] dt \\ &= \int \left[\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{t + \frac{a+1}{a-1}}{t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1}} \right] dt \end{aligned}$$

Der letzte Bruch lässt sich in zwei Brüchen zerlegen, so dass der erste Bruch im Zähler ein Vielfaches der Ableitung des Zählers bzw. der zweite einen konstanten Zähler hat:

$$\begin{aligned} \frac{t + \frac{a+1}{a-1}}{t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1}} &= \frac{\left(t + \frac{1}{a-1}\right)' + \frac{a}{a-1}}{t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1}\right)'}{t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1}} + \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{\left(t + \frac{1}{a-1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{a^2-2}}{a-1}\right)^2} \end{aligned}$$

In unserem Fall ist ($a \neq 1$ und zusätzlich) $(a^2 - 2) > 0$, $(a - 1) > 0$. Wir können dann integrieren:

$$\int \frac{\sin x}{a + \sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \arctan t - \ln \left(t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1} \right) + \frac{a}{\sqrt{a^2-2}} \arctan \frac{(a-1)t+1}{\sqrt{a^2-2}} + C = \dots$$

und die Rücksubstitution muss noch durchgeführt werden. ■

```
s := 2*t/(1+t^2) ; c := (1-t^2)/(1+t^2) ; ableitung := 2/(1+t^2) ;
simplify( s/(a+s+c)*ableitung ) ;
##
int( sin(x)/(a + sin(x)+cos(x)) , x ) ;
a := 17/12 ;
int( sin(x)/(a + sin(x)+cos(x)) , x ) ;

> s := 2*t/(1+t^2) ; c := (1-t^2)/(1+t^2) ; ableitung := 2/(1+t^2) ;
      t
      s := 2 -----
             2
            1 + t

             2
            1 - t
      c := -----
             2
            1 + t

             2
      ableitung := -----
```

```

                                2
                                1 + t

> simplify( s/(a+s+c)*ableitung );

                                t
                                4 -----
                                2      2      2
                                (1 + t ) (a + a t  + 2 t + 1 - t )

> ##
> int( sin(x)/(a + sin(x)+cos(x)) , x );
- 1/2 ln(a + a tan(1/2 x)  + 2 tan(1/2 x) - tan(1/2 x)  + 1)
a arctan(1/2 -----)
                2 tan(1/2 x) (a - 1) + 2
                2      1/2
                (a - 2)
- ----- + 1/2 ln(1 + tan(1/2 x)  )
  2      1/2
  (a - 2)

+ arctan(tan(1/2 x))

> a := 17/12 ;
                                17
                                a := --
                                12

> int( sin(x)/(a + sin(x)+cos(x)) , x );
- 1/2 ln(29 + 5 tan(1/2 x)  + 24 tan(1/2 x)) - 17 arctan(5 tan(1/2 x) + 12)
+ 1/2 ln(1 + tan(1/2 x)  ) + arctan(tan(1/2 x))

```

Die nächste Aufgabe ist ein Spezialfall der obigen allgemeineren Rechnung für $a = \sqrt{2}$. In diesem Fall ist $a^2 - 2 = 0$, so dass die Berechnung leicht geändert werden muss.

Aufgabe 73

Berechnen Sie $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx$.

LÖSUNG: Wir substituieren $y = \tan(x/2)$ und bekommen wie in der letzten Aufgabe, dieses Mal jedoch für $a = 2$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\sqrt{2} + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \int \left[\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{t + \frac{a+1}{a-1}}{t^2 + \frac{2}{a-1}t + \frac{a+1}{a-1}} \right] dt \\
 &= \int \left[\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{t + \frac{a+1}{a-1}}{\left(t + \frac{1}{a-1}\right)^2} \right] dt
 \end{aligned}$$

wegen $a^2 - 2 = 0$!!

= ...

Aufgabe 74

Berechnen Sie $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$.

Aufgabe 75

Berechnen Sie $\int \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

4.4.4 Integrale von Funktionen der Form $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right)$

Aufgabe 76

Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$$\frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1+x}}, \quad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x+1}}, \quad \frac{1}{(x+2)\sqrt{1+x}}.$$

4.4.5 Integrale der Funktionen vom Typ $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ und die eulerschen Substitutionen

Aufgabe 77

Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$$\frac{1}{x\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}, \quad \frac{x}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}, \quad \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}, \quad \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$$

4.4.6 Binomische Integrale

Aufgabe 78

Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$$\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{x^2(1+x^2)^{3/2}}, \quad \sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{1+x^{n+1}}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Kapitel 5

Die Laplace–Transformation und die Lösung einiger Typen von Differenzialgleichungen mittels der Laplace–Transformation

5.1 Theorie

Wir betrachten zuerst den Raum der “Originalfunktionen”

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} ,$$

- welche stetig (oder allgemeiner messbar und lokal integrierbar) sind
- und welche (bei $+\infty$) höchstens Exponentialverhalten registrieren: Dies bedeutet, dass man die Funktion f für **geeignete, von f abhängigen Konstanten** $C = C(f), A = A(f) > 0$ mit einer Exponentialfunktion durch eine Abschätzung der Form

$$|f(x)| \leq C \exp(Ax) , \quad \text{alle } x \in [0, \infty)$$

kontrollieren kann.

Definition 79 Wir definieren für jede “Originalfunktion” $f = f(x)$ ihre LAPLACE–Transformation $F = F(p)$ wie folgt:

$$F(p) := \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx .$$

Die Funktion F heißt die “Bildfunktion” durch die LAPLACE–Transformation.

Sie ist für alle $p \in \mathbb{R}$ (allgemeiner alle $p \in \mathbb{C}$) mit der Eigenschaft $p > A(f)$ (allgemeiner mit der Eigenschaft $\Re p > A(f)$) wohldefiniert. (An dieser Stelle wird die Abschätzung durch die Exponentialfunktion $x \rightarrow C \exp(Ax)$ effektiv verwendet.)

Die LAPLACE–Transformation wird mit

$$\mathcal{L}$$

in der Spezialliteratur bezeichnet. Man schreibt also $F = \mathcal{L}(f)$ für eine Originalfunktion f und ihre LAPLACE–Transformierte F .

Um den unvermeidlichen, sich oft wiederholenden Satz “ $F(p)$ ist die LAPLACE–Transformierte an der Stelle p der Originalfunktion $f(x)$ ” wird kurz und gut die Bezeichnung verwendet:

$$f(x) \circ \text{---} \bullet F(x)$$

Proposition 80 Sei f eine Originalfunktion und sei F die Bildfunktion.

$$f(x) \circ \longrightarrow \bullet F(p)$$

Dann entsprechen sich folgende Funktionale Operationen auf f, F :

- **(I) Die Dehnungs-Eigenschaft** für eine positive Konstante $a > 0$:

$$f(ax) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

- **(II) Die Verschiebungs-Eigenschaft** für eine positive Konstante $p_0 > 0$:

$$e^{p_0 x} \cdot f(x) \circ \longrightarrow \bullet F(p - p_0)$$

- **(III) Die Verträglichkeit der n -ten Ableitung der Originalfunktion mit der Multiplikation mit p^n für die Bildfunktion (bis auf polynomiale Störglieder):**

Falls alle n ersten Ableitungen von f (d.h. $f', f'', \dots, f^{(n)}$) existieren (und an der Stelle Null stetig sind) und im Raum der Originalfunktionen liegen, dann gilt:

$$f^{(n)}(x) \circ \longrightarrow \bullet p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

- **(IV) Die Verträglichkeit der Multiplikation mit $(-x)^n$ der Originalfunktion mit der n -ten Ableitung der Bildfunktion:**

Die Funktion F ist immer unendlich oft differenzierbar im Definitionsbereich und es gilt:

$$(-x)^n \cdot f(x) \circ \longrightarrow \bullet F^{(n)}(p)$$

- **(V) Die Verträglichkeit der Originalfunktionen-Faltung mit dem Bildfunktionen-Produkt:**

$$(f * g)(x) \circ \longrightarrow \bullet (FG)(p)$$

Proposition 81 Die LAPLACE-Transformation ist injektiv: Aus $f(x) \circ \longrightarrow \bullet F(x)$, $g(x) \circ \longrightarrow \bullet G(x)$ und

$$F = G$$

folgt

$$f = g .$$

5.2 Die Tabelle der Standard-Laplace-Transformationen

$f(x)$	$F(p)$		
1	$p^{-1} = \frac{1}{p}$	$\Re p > 0$	
x	$p^{-2} = \frac{1}{p^2}$	$\Re p > 0$	
x^n	$n! p^{n+1} = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\Re p > 0$	$n \in \mathbb{N}$
x^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\Re p > 0$	$a > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$	$\Re(p-a) > 0$	
$\sin(ax)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\Re p > 0$	$a \in \mathbb{R}$
$\cos(ax)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\Re p > 0$	$a \in \mathbb{R}$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\Re p > a $	$a \in \mathbb{R}$
$\cosh(ax)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\Re p > a $	$a \in \mathbb{R}$
$x \sin(ax)$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$	$\Re p > 0$	$a \in \mathbb{R}$
$x \cos(ax)$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\Re p > 0$	$a \in \mathbb{R}$
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\Re(p-a) > 0$	$n \in \mathbb{N}$
$\sin(ax) - (ax) \cos(ax)$	$\frac{2a^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\Re p > 0$	$a \in \mathbb{R}$

5.3 Aufgaben

5.3.1 Berechnungen einiger Standard-Laplace-Transformationen

Einige erste Aufgaben zeigen, wie schnell man aus den Eigenschaften der LAPLACE-Transformation die obige Tabelle nachvollzogen werden kann:

Aufgabe 82

Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(x) = 1$

LÖSUNG: Es gilt Per Definition:

$$\begin{aligned} F(p) &= (\mathcal{L}f)(p) := \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-px} dx = \left[-\frac{1}{p} e^{-px} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{p} e^{-\infty} + \frac{1}{p} e^0 = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 83

Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(x) = x$

LÖSUNG: Die Ableitungs-Verträglichkeit der Bildfunktion mit der Multiplikation mit $(-x)$ in der Originalfunktion liefert sofort:

$$\begin{array}{ll} f(x) \circ \longrightarrow \bullet F(p) & 1 \circ \longrightarrow \bullet 1/p \\ (-x)f(x) \circ \longrightarrow \bullet F'(p) & (-x) \cdot 1 \circ \longrightarrow \bullet ? \end{array}$$

Es folgt also:

$$\begin{array}{l} (-x) \circ \longrightarrow \bullet (1/p)' \\ x \circ \longrightarrow \bullet 1/p^2 \end{array}$$

■

Aufgabe 84

Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(x) = x^n$

LÖSUNG: Wir beweisen durch vollständige Induktion nach n die Formel:

$$x^n \circ \longrightarrow \bullet n! p^{-(n+1)}$$

Induktionsanfang: Für $n = 0$ haben wir bereits nachgeprüft, dass gilt:

$$x^0 = 1 \circ \longrightarrow \bullet 1/p = 0! p^{-(0+1)}$$

Der **Induktionsschritt:** Wir machen für ein festen n die **Induktionsannahme**, dass $x^n \circ \longrightarrow \bullet n! p^{-(n+1)}$ gilt, und berechnen die LAPLACE-Transformation der Funktion x^{n+1} : Es gilt:

$$\begin{array}{l} x^n \circ \longrightarrow \bullet n! p^{-(n+1)} \\ (-x) \cdot x^n \circ \longrightarrow \bullet (n! p^{-(n+1)})' = -(n+1) \cdot n! p^{-(n+1)-1} = -(n+1)! p^{-(n+2)} \end{array}$$

■

Aufgabe 85

Berechnen Sie die Laplace–Transformation der Funktion $f(x) = e^{ax}$.

LÖSUNG: Diese folgt sofort aus der Verschiebungs–Eigenschaft: Die Verschiebung von $1 \circ - \bullet 1/p$ ergibt sofort $e^{ax} \cdot 1 \circ - \bullet 1/(p - a)$. ■

Aufgabe 86

Berechnen Sie die Laplace–Transformation der Funktion $f(x) = \sin x$.

LÖSUNG: Sei $F = F(p)$ die gesuchte Funktion, $\Re p > 0$. Die gegebene Funktion $f = \sin x$ erfüllt die Differentialgleichung

$$f'' + f = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Durch die LAPLACE–Transformation ergibt sich für F eine **algebraische Funktionalgleichung**:

$$\begin{aligned} (p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)) + F(p) &= 0, & \text{also} \\ F(p)(p^2 + 1) &= 1, & \text{also} \\ F(p) &= 1/(p^2 + 1). \end{aligned}$$

■

5.3.2 Lösung einiger Differentialgleichungen mittels der Laplace–Transformation

Aufgabe 87

Lösen Sie die Differentialgleichung (das Cauchy–Problem):

$$f'' + f' - 42f = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = -1.$$

Hinweis: Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen sichert die Eindeutigkeit der Lösung. Finden Sie also eine/die Lösung, indem Sie annehmen, dass f im Raum der Originalfunktionen (Laplace–transformierbaren Funktionen) liegt.

LÖSUNG: Wir suchen wir im Hinweis eine/die Lösung, welche im Raum der Originalfunktionen (LAPLACE–transformierbaren Funktionen) liegt.

Nach Anwendung der LAPLACE–Transformation folgt:

$$(p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)) + (pF(p) - f(0)) - 42F(p) = 0.$$

Diese algebraische Gleichung hat die Lösung:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + p - 42} = \frac{p}{(p+7)(p-6)} = \frac{7}{13} \cdot \frac{1}{p+7} + \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{p-6}.$$

(Wir haben gleichzeitig eine Partialbruchzerlegung durchgeführt, damit die Rücktransformation direkt wird.) Durch die Injektivität der LAPLACE–Transformation folgt:

$$f(x) = \frac{7}{13} \cdot e^{-7x} + \frac{6}{13} \cdot e^{6x}.$$

■

Man kann sich in maple vergewissern ...

```
with(inttrans):
laplace( diff(f(x),x,x) + diff(f(x),x) - 42*f(x) , x , p );
convert( p/( (p+7)*(p-6) ) , parfrac , p );
DGL := diff(f(x),x,x) + diff(f(x),x) - 42*f(x) = 0 ;
dsolve( {DGL , f(0)=1, D(f)(0)=-1 } , f(x) );
dsolve( {DGL , f(0)=1, D(f)(0)=-1 } , f(x) , method = laplace );
```

Aufgabe 88**Lösen Sie die Differenzialgleichung (das Cauchy-Problem):**

$$f' - 7f = \sin x, \quad f(0) = 0.$$

Hinweis: Die Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen sichert die Eindeutigkeit der Lösung. Finden Sie also eine/die Lösung, indem Sie annehmen, dass f im Raum der Originalfunktionen (laplace-transformierbaren Funktionen) liegt.

LÖSUNG: Wir suchen wir im Hinweis eine/die Lösung, welche im Raum der Originalfunktionen (LAPLACE-transformierbaren Funktionen) liegt. Sei $F = \mathcal{L}f$ die LAPLACE-Transformierte von f . Nach Anwendung der LAPLACE-Transformation folgt:

$$(pF(p) - f(0)) - 7F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Diese algebraische Gleichung hat die Lösung:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)(p - 7)} = \frac{1}{50} \frac{1}{p - 7} - \frac{1}{50} \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{7}{50} \frac{1}{p^2 + 1}.$$

(Wir haben gleichzeitig eine Partialbruchzerlegung durchgeführt, damit die Rücktransformation direkt wird:) Durch die Injektivität der LAPLACE-Transformation folgt:

$$f(x) = \frac{1}{50} e^{7x} - \frac{1}{50} \cos x - \frac{7}{50} \sin x.$$

Man kann sich in maple vergewissern ...

```
with(inttrans):
laplace( diff(f(x),x) - 7*f(x) = sin(x) , x , p) ;
convert( 1/( (p-7)*(p^2+1) ) , parfrac , p );
DGL := diff(f(x),x) - 7*f(x) = sin(x) ;
dsolve( {DGL , f(0)=0} , f(x) );
dsolve( {DGL , f(0)=0} , f(x) , method = laplace );
```

In dem Output befinden sich z.B. die Zeilen:

```
> convert( 1/( (p-7)*(p^2+1) ) , parfrac , p );
```

$$\frac{1}{50} \frac{1}{p - 7} - \frac{1}{50} \frac{p + 7}{p^2 + 1}$$

```
> DGL := diff(f(x),x) - 7*f(x) = sin(x) ;
```

$$\text{DGL} := \frac{d}{dx} f(x) - 7 f(x) = \sin(x)$$

```
> dsolve( {DGL , f(0)=0} , f(x) );
```

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cos(x) - \frac{7}{50} \sin(x) + \frac{1}{50} \exp(7 x)$$

Kapitel 6

Probeklausur

Aufgabe 89

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für

$$S_N := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

und beweisen Sie direkt oder durch vollständige Induktion die entsprechende Formel. Dabei ist $N \geq 1$ eine natürliche Zahl.

LÖSUNG: Einige maple-Versuche lassen sofort ahnen, wie der geschlossene Ausdruck für die Summe auszusehen hat:

```
S := n -> sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..n );
for n from 1 to 10 do
  print( n, S(n), evalf(S(n)) );
od;
for n from 100 to 105 do
  print( n, S(n), evalf(S(n)) );
od;
```

```
> S := n -> sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..n );
```

```
          n
-----
 \      1
 )  -----
 /      k (k + 1) (k + 2)
-----
'k' = 1
```

```
> for n from 1 to 10 do
>   print( n, S(n), evalf(S(n)) );
> od;
```

```
1, 1/6, .1666666667
2, 5/24, .2083333333
3, 9/40, .2250000000
4, 7/30, .2333333333
5, 5/21, .2380952381
```

27

```

6, ---, .2410714286
112

35
7, ---, .2430555556
144

11
8, --, .2444444444
45

27
9, ---, .2454545455
110

65
10, ---, .2462121212
264

> for n from 100 to 105 do
>   print( n, S(n), evalf(S(n)) );
> od;

2575
100, -----, .2499514657
10302

1313
101, -----, .2499524081
5253

5355
102, -----, .2499533234
21424

5459
103, -----, .2499542125
21840

1391
104, -----, .2499550764
5565

2835
105, -----, .2499559161
11342

```

Offensichtlich konvergiert die Folge (S_N) gegen $0.25 = 1/4$. Es liegt nahe, den Abstand $1/4 - S(n)$ zu berechnen:

```

for n from 1 to 10 do
  print( n, 1/4-S(n) );
od;

```

```

1, 1/12
2, 1/24
3, 1/40
4, 1/60

```

- 5, 1/84
- 6, 1/112
- 7, 1/144
- 8, 1/180
- 9, 1/220
- 10, 1/264

Wenn immer noch keine Vermutung in der Luft liegt, dann verlangen wir von maple alles:

`sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..N);`

`> sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..N);`

$$1 - \frac{1}{2(N+2)(N+1)} + \frac{1}{4}$$

Wir beweisen nun durch vollständige Induktion die Aussage:

$$A(N) := \left[\text{Es gilt } \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \right], \quad N \in \mathbb{N}, N \geq 1.$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr, denn es gilt:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+1)(1+2)}.$$

Induktionsschritt: Sei $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Aussage $A(n)$ gilt. Dann können wir berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \right) \end{aligned}$$

da die Aussage $A(n)$ wahr ist,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{N+3} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{(N+3) - 2}{2(N+3)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{N+1}{2(N+3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+2)(N+3)}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die Aussage $A(n+1)$ wahr ist.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$, wahr. ■

Alternativer Beweis durch "teleskopische" Kürzungen: Es gilt:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]. \tag{6.1}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)(N+2)} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right] + \cdots + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N \cdot (N+1)} - \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} .
 \end{aligned}$$

■

Alternativer Beweis durch “teleskopische” Kürzungen nach Partialbruchzerlegung: (Der letzter Beweis ist sehr geheimnisvoll. Wie kann man überhaupt auf die Zerlegung (6.1) kommen? Die Antwort ist: Man kann die Partialbruchzerlegung des allgemeinen Summanden $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ zuerst durchführen und dann den “teleskopischen” Trick für diese anwenden. Eine Verfeinerung wäre dann der obige Beweis.)

Wir suchen also **formale** Darstellung von der Gestalt:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} .$$

Die Unbekannten sind A, B, C . **Falls es eine solche Darstellung gibt**, so können wir weiter wie folgt nach Beseitigung der Nenner schließen:

$$1 = A(k+1)(k+2) + Bk(k+2) + Ck(k+1) .$$

Setzen wir nun für k die Werte $0, -1$ und -2 ein, die Nullstellen des Hauptnenners $k(k+1)(k+2)$, so erhalten wir mühelos:

$$\begin{aligned}
 1 &= 2A , \\
 1 &= -B , \\
 1 &= 2C .
 \end{aligned}$$

Falls es eine Darstellung – wie gewünscht – gibt, so ist diese:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} .$$

Man **muss** diese kurz nachprüfen bzw. in einer Klausur **erwähnen**, dass man es nachgeprüft hat. Der maple-Code für die Partialbruchzerlegung ist:

```
> convert( 1/k/(k+1)/(k+2) , parfrac , k );
```

$$\frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2}$$

Die Lösung der Aufgabe ist nun einfach. Nach Gruppierung:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

und nach "teleskopischen" Kürzungen:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)} + \frac{1}{2(N+2)}.
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist eine gleichwertige geschlossene Formel für die Summe aus der Aufgabenstellung. ■

Aufgabe 90

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 3 um 1 für die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^x$.

LÖSUNG: Wir substituieren $x = 1 + h$ und untersuchen die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(h) := (1 + h)^{1+h}$ um $h = 0$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 g(h) &= (1 + h)^{1+h} \\
 &= \exp(\ln(1 + h))^{1+h} \\
 &= \exp((1 + h) \ln(1 + h)).
 \end{aligned}$$

Wir haben die TAYLOR-Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
 \ln(1 + h) &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^4), \\
 (1 + h) \ln(1 + h) &= (1 + h) \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right) + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= h + \left(1 - \frac{1}{2} \right) h^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) h^3 + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 + \mathcal{O}(h^4).
 \end{aligned}$$

Schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
 g(h) &= \exp((1+h)\ln(1+h)) \\
 &= 1 + \left(h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3\right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \left(h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3\right)^3 + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= 1 + \left(h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{6}h^3\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left(h^2 + 2\frac{1}{2}h^3 + \mathcal{O}(h^4)\right) \\
 &\quad + \frac{1}{3!} (h^3 + \mathcal{O}(h^4)) + \mathcal{O}(h^4) \\
 &= 1 + h + h^2 + \frac{1}{2}h^3 + \mathcal{O}(h^4).
 \end{aligned}$$

■

```

taylor( x^x , x=1 );
taylor( (1+h)*ln(1+h) , h=0 );
taylor( (1+h)^(1+h) , h=0 );

> taylor( x^x , x=1 );
      2      3      4      5      6
1 + x - 1 + (x - 1) + 1/2 (x - 1) + 1/3 (x - 1) + 1/12 (x - 1) + 0((x - 1) )

> taylor( (1+h)*ln(1+h) , h=0 );
      2      3      4      5      6
h + 1/2 h - 1/6 h + 1/12 h - 1/20 h + 0(h )

> taylor( (1+h)^(1+h) , h=0 );
      2      3      4      5      6
1 + h + h + 1/2 h + 1/3 h + 1/12 h + 0(h )

```

Aufgabe 91

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \right]$

LÖSUNG:

Lösung durch Umformung:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

```
> limit( x*(sqrt(x^2+1)-x) , x=infinity);
1/2
```

Lösung durch die Substitution $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{y}$ und Taylor-Entwicklung um 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \right] &= \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{y} \left[\left(\frac{1}{y^2} + 1 \right)^{1/2} - \frac{1}{y} \right] = \lim_{y \searrow 0} \frac{\frac{(1+y^2)^{1/2}}{y} - \frac{1}{y}}{y} \\ &= \lim_{y \searrow 0} \frac{(1+y^2)^{1/2} - 1}{y^2} = \lim_{y \searrow 0} \frac{\left(1 + \binom{1/2}{1} y^2 + \mathcal{O}(y^4) \right) - 1}{y^2} \\ &= \binom{1/2}{1} \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

```
fx := x*(sqrt(x^2+1)-x) ;
fy := subs( x=1/y , fx );
taylor( fy , y=0 , 4);
```

```
> fx := x*(sqrt(x^2+1)-x) ;
```

$$fx := x \left((x^2 + 1)^{1/2} - x \right)$$

```
> fy := subs( x=1/y , fx );
```

$$fy := \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{y^2}} - \frac{1}{y}}{y}$$

```
> taylor( fy , y=0 , 4);
```

$$1/2 - 1/8 y^2 + \mathcal{O}(y^4)$$

Aufgabe 92

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{\tan(\arcsin x) - \arcsin(\tan x)}$

Wir berechnen zuerst einige TAYLOR-Entwicklungen mit dem Taschenrechner des neuen Jahrtausends:

```
taylor( tan(sin(x)) - sin(tan(x)) , x=0 , 8);
taylor( tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) , x=0 , 8);
f := tan(sin(x)) - sin(tan(x)) ;
g := tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) ;
limit( f/g , x=0 );
```

```
> taylor( tan(sin(x)) - sin(tan(x)) , x=0 , 8);
```

$$1/30 x^7 + \mathcal{O}(x^8)$$

```
> taylor( tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) , x=0 , 8);
```

$$- \frac{1}{30} x^7 + \mathcal{O}(x^9)$$

```
> f := tan(sin(x)) - sin(tan(x)) ;
      f := tan(sin(x)) - sin(tan(x))
```

```
> g := tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) ;
      g := ----- - arcsin(tan(x))
              x
              2 1/2
            (1 - x )
```

```
> limit( f/g , x=0 );
      -1
```

Wir sind also gezwungen, für eine menschliche Lösung, TAYLOR-Entwicklungen hässlicher Funktionen bis zur Ordnung 7 (also modulo $\mathcal{O}(x^8)$) zu betrachten. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8), \\ \frac{1}{\cos} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)\right)} \\ &= 1 \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)\right)^3 + \mathcal{O}(x^8) \\ &= 1 \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!}\right)^3 + \mathcal{O}(x^8) \\ &= 1 \\ &\quad + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^4}{2!^2} - 2\frac{x^6}{2!4!}\right) \\ &\quad + \left(\frac{x^6}{2!^3}\right) + \mathcal{O}(x^8) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \mathcal{O}(x^8), \\ \tan x &= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 \right) + \mathcal{O}(x^8) \\
&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \right) x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{5}{24} \right) x^5 + \left(-\frac{1}{7!} + \frac{1}{2 \cdot 5!} - \frac{5}{24 \cdot 3!} + \frac{61}{720} \right) x^7 + \mathcal{O}(x^8) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}(x^8), \\
\sin(\sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8) \right) \\
&\quad - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8) \right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8) \right)^5 \\
&\quad - \frac{1}{7!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \mathcal{O}(x^8) \right)^7 + \mathcal{O}(x^8) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{x^3}{3!} \right)^5 \\
&\quad - \frac{1}{7!} x^7 + \mathcal{O}(x^8) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \\
&\quad - \frac{1}{3!} \left(x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{3!} - 3x \cdot \left(\frac{x^3}{3!} \right)^2 + 3x^2 \cdot \frac{x^5}{5!} \right) \\
&\quad + \frac{1}{5!} \left(x^5 - 5x^4 \cdot \frac{x^3}{3!} \right)^5 \\
&\quad - \frac{1}{7!} x^7 + \mathcal{O}(x^8) \\
&= x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 + \mathcal{O}(x^8), \\
\sin(\tan x) &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}(x^8) \right) \\
&\quad - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}(x^8) \right)^3 \\
&\quad + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}(x^8) \right)^5 \\
&\quad - \frac{1}{7!} \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathcal{O}(x^8) \right)^7 \\
&= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3!} \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \right)^3 \\
& \quad + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{1}{3}x^3 \right)^5 \\
& \quad - \frac{1}{7!} x^7 + \mathcal{O}(x^8) \\
= & \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \right) \\
& - \frac{1}{3!} \left(x^3 + 3x^2 \left(\frac{1}{3}x^3 \right) + 3x \left(\frac{1}{3}x^3 \right)^2 + 3x^2 \left(\frac{2}{15}x^5 \right) \right) \\
& \quad + \frac{1}{5!} \left(x^5 + 5x^4 \left(\frac{1}{3}x^3 \right) \right) \\
& \quad - \frac{1}{7!} x^7 + \mathcal{O}(x^8) \\
= & x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!} \right) x^3 + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \right) x^5 \\
= & x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + \mathcal{O}(x^8), \\
\tan(\sin x) - \sin(\tan x) = & \left(x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{107}{5040}x^7 + \mathcal{O}(x^8) \right) - \left(x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{55}{1008}x^7 + \mathcal{O}(x^8) \right) \\
= & \left(-\frac{107}{5040} + \frac{55}{1008} \right) x^7 + \mathcal{O}(x^8) = -\frac{1}{30}x^7 + \mathcal{O}(x^8).
\end{aligned}$$

Analog und mühsamer bekommt man:

$$\frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 - \binom{-1/2}{1} x^2 + \binom{-1/2}{2} x^4 - \binom{-1/2}{3} x^6 + \mathcal{O}(x^8),$$

Durch formales Integrieren und der korrekten Anpassung des Koeffizienten Nullten Grades bekommt man:

$$\arcsin x = x - \frac{1}{3} \binom{-1/2}{1} x^2 + \frac{1}{5} \binom{-1/2}{2} x^5 - \frac{1}{7} \binom{-1/2}{3} x^7 + \mathcal{O}(x^8),$$

Aufgabe 93

Berechnen Sie das Integral:

$$J := \int_2^3 \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx.$$

LÖSUNG: Wir berechnen direkt durch die Substitution $y = x^2$:

$$\begin{aligned}
J &= \int_2^3 \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} x dx \\
&= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} d(x^2) \\
&= \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{y(y+1)^2} dy.
\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung: Gesucht sind A, B, B' in der Darstellung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y(y+1)^2} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} + \frac{B'}{(y+1)^2} \quad \text{oderäquivalent} \\
1 &= A(y+1)^2 + By(y+1) + B'y.
\end{aligned}$$

Setzt man die Werte 0, -1, 1 für y ein, so folgt daraus: $1 = A$, $1 = -B'$ und $1 = 4A + 2B + B'$. Es folgt die Darstellung:

$$\frac{1}{y(y+1)^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2}.$$

> convert(1/y/(y+1)^2 , parfrac , y);

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{y+1}$$

Man kann nun leicht integrieren:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{y(y+1)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_4^9 \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln|y| - \ln|y+1| + \frac{1}{y+1} \right]_4^9 = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{10}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{10} \right) - \frac{1}{20} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8} - \frac{1}{20} \\ &= \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

■

> int(1/x/(x^2+1)^2 , x=2..3);

$$\ln(3) - \frac{3}{2} \ln(2) - \frac{1}{20}$$

Aufgabe 94

Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$, $f(x) := (2x+3)e^{-x^2/2}$.

(Asymptoten, Monotonie, Konvexität/Konkavität, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte.)

LÖSUNG: Die ersten zwei Ableitungen von f sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2 - x(2x+3)] e^{-x^2/2} = -(x+2)(2x-1)e^{-x^2/2}, \\ f''(x) &= [-(4x+3) + (2x^2+3x-2)x] e^{-x^2/2} = (2x^3+3x^2-6x-3)e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

- Die Funktion f hat die einzige Nullstelle bei $a = -3/2$.
- Die Funktion f' hat die Nullstellen bei $b_1 = -2$, $b_2 = 1/2$.
- Die Funktion f'' hat keine rationalen Nullstellen. Annäherungen der Werte der Nullstellen von f'' oder äquivalent von $(2x^3+3x^2-6x-3)$ sind:

> fsolve(2*x^3+3*x^2-6*x-3 = 0);

$$-2.469001750, -.4332540387, 1.402255789$$

Wir bezeichnen diese drei Werte mit c_1, c_2, c_3 , $c_1 < c_2 < c_3$.

Die Tabelle der Variation für f ist dann:

x	$-\infty$		c_1		b_1		a		c_2		b_2		c_3		$+\infty$
$f(x)$	-0	↘↘	WP	↘↘	TP	↗↗	0	↗↗	WP	↗↗	HP	↘↘	WP	↘↘	$+\infty$
$f'(x)$	-0	--	-	--	0	++	+	++	+	++	0	--	-	--	-0
$f''(x)$	-0	--	0	++	+	++	+	++	0	--	-	--	0	++	+0

■

Mit dem maple-Befehl `plot((2*x+3)*exp(-x*x/2) , x=-4..4 , legend = 'Only function')`; erhält man das Bild an der Seite 70

Abbildung 6.1: Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2x + 3)e^{-x^2/2}$.

Aufgabe 95

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \sin x$.

Berechnen Sie die Funktion $\mathcal{L}f = (\mathcal{L}f)(p)$ für $p > 0$

$$F(p) := (\mathcal{L}f)(p) := \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$$

- direkt durch zweifache partielle Integration und
- durch die Eigenschaften der Laplace-Transformation.

LÖSUNG:

Direkte Berechnung durch zweifache partielle Integration:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(p) &:= \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-px} dx = \int_0^{\infty} [-\cos(x)]' e^{-px} dx \\ &= [-\cos(x)e^{-px}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-\cos(x)) [e^{-px}]'_x dx = 1 - p \int_0^{\infty} \cos(x) e^{-px} dx \\ &= 1 - p \int_0^{\infty} [\sin(x)]' e^{-px} dx = 1 - p \left\{ [\sin(x) e^{-px}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \sin(x) [e^{-px}]'_x dx \right\} \\ &= 1 - p \left\{ 0 + p \int_0^{\infty} \sin(x) e^{-px} dx \right\} = 1 - p^2 (\mathcal{L}f)(p) . \end{aligned}$$

Aus

$$(\mathcal{L}f)(p) = 1 - p^2 (\mathcal{L}f)(p)$$

folgt jedoch sofort

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(p)(p^2 + 1) &= 1 , \\ (\mathcal{L}f)(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} . \end{aligned}$$

Berechnung durch die Eigenschaften der Laplace-Transformation: Die Funktion $f(x) := \sin x$ erfüllt $f(0) = \sin(0) = 0$, $f'(0) = \sin'(0) = 1$ und die Differentialgleichung:

$$f'' + f = 0 , \quad \sin'' + \sin = 0 .$$

Es folgt durch die LAPLACE-Transformation, welche auf der der Differentialgleichung angewandt wird, für die Funktion $F(p) := (\mathcal{L}f)(p)$:

$$\begin{aligned} [p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)] + F(p) &= 0 , \\ F(p)(p^2 + 1) &= pf(0) + f'(0) = 1 , \\ F(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

> f := sin(x);

f := sin(x)

> with(inttrans): laplace(f , x , p);

$$\frac{1}{p^2 + 1}$$

Aufgabe 96

Lösen Sie die Differenzialgleichung:

$$f'' - 4f' + 3f = e^{2x}, \quad f(0) = f'(0) = 1.$$

LÖSUNG: Durch die LAPLACE-Transformation entsteht aus der gegebenen Differenzialgleichung eine algebraische Gleichung, welche "einfacher" gelöst werden kann:

Sei $F = F(p)$ die LAPLACE-Transformation der Funktion $f = f(x)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} [p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)] - 4[pF(p) - f(0)] + 3F(p) &= \frac{1}{p-2}, \\ F(p)(p^2 - 4p + 3) &= pf(0) + f'(0) - 4f(0) + \frac{1}{p-2} \\ &= p - 3 + \frac{1}{p-2} = \frac{p^2 - 5p + 7}{p-2}, \\ F(p) &= \frac{p^2 - 5p + 7}{(p-2)(p^2 - 4p + 3)} = \frac{p^2 - 5p + 7}{(p-2)(p-1)(p-3)}. \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{p^2 - 5p + 7}{(p-2)(p-1)(p-3)}$ ist:

```
F := (p^2-5*p+7) / ((p-1)*(p-2)*(p-3));
convert(F, parfrac, p);
```

```
> F := (p^2-5*p+7) / ((p-1)*(p-2)*(p-3));
```

$$F := \frac{p^2 - 5p + 7}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

```
> convert(F, parfrac, p);
```

$$\frac{3}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-3}$$

Die inverse LAPLACE-Transformation liefert sofort:

$$f(x) = -\frac{3}{2}e^x - e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

```
dsolve( { diff(f(x),x,x)-4*diff(f(x),x)+3*f(x) = exp(2*x), f(0)=1, D(f)(0)=1} , f(x) );
```

```
> dsolve( { diff(f(x),x,x)-4*diff(f(x),x)\
> +3*f(x) = exp(2*x), f(0)=1, D(f)(0)=1} , f(x) );
```

$$f(x) = -\exp(2 x) + 3/2 \exp(x) + 1/2 \exp(3 x)$$

Aufgabe 97Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x + 5}$.

LÖSUNG:

Wir substituieren:

$$\begin{aligned}\tan \frac{x}{2} &= t, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x &= 2 \arctan t, \\ dx &= \frac{2}{1+t^2} dt.\end{aligned}$$

Es folgt **formal**:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x + 5} &= \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \frac{2t}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2t^2 + 3t + 3} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{16}} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \arctan \frac{4\left(t + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{15}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \frac{4t + 6}{\sqrt{15}} + C.\end{aligned}$$

Einige Schritte auf dem Lösungsweg sind:

```
J := Int( 1/( cos(x)+3*sin(x)+5) , x );
with(student):
changevar( t=tan(x/2) , J , t );
s := 2*t/(1+t^2) ; c := (1-t^2)/(1+t^2) ;
simplify( 1/( c +3*s +5 )*2/(1+t^2) );
```

Die direkte Berechnung ist auch möglich:

```
> int( 1/( cos(x)+3*sin(x)+5) , x );
          1/2
2/15 15  arctan(1/30 (8 tan(1/2 x) + 6) 15  )
```