

Übungen zur Analysis I

SS 2002 : ba.uni-mannheim.de

Dr. Dan Fulea

Internetbegleitung

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~dan/Teaching/SS2002/ba.tex>

Kapitel 1

Das Taylor–Polynom

1.1 Theorie

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall in \mathbb{R} .

Sei x_0 in I .

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine p mal stetig differenzierbare Funktion.

Schreibweise:

$$f \in \mathcal{C}^p(I) .$$

(Dies bedeutet, dass f differenzierbar ist und folglich die Ableitung f' existiert, dass zusätzlich f' erneut differenzierbar ist und folglich die zweite Ableitung f'' existiert, usw. bis zuletzt $f^{(p)}$, die p -te Ableitung von f existiert und diese **stetig** ist.)

Dann ist das TAYLOR–Polynom von f von der Ordnung p um x_0 das folgende Polynom $T_p(x)$ oder in voller Notation mit Berücksichtigung aller Parameter $T_{p,f,x_0}(x)$:

$$\begin{aligned} T_p(x) &= T_{p,f,x_0}(x) \\ &:= f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(x_0)(x - x_0)^p \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k . \end{aligned}$$

Proposition 1 Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (nicht nur eine p mal sondern sogar) eine $(p + 1)$ Male stetig differenzierbare Funktion,

$$f \in \mathcal{C}^{p+1}(I)$$

Dann ist T_p eine Approximation p -ter Ordnung von f um x_0 in dem Sinne, dass gelten:

$$f(x) = T_p(x) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi)(x - x_0)^{p+1}$$

für ein geeignetes ξ zwischen x_0 und x . Insbesondere:

$$\begin{aligned} |f(x) - T_p(x)| &= \frac{1}{(p+1)!} |f^{(p+1)}(\xi)| |x - x_0|^{p+1} \\ &\leq \frac{1}{(p+1)!} \cdot \max_{\xi \text{ zwischen } x_0, x} |f^{(p+1)}(\xi)| |x - x_0|^{p+1} . \end{aligned}$$

Aus diesem Grund wird oft auch die Schreibweise verwendet:

$$f(x) = T_p(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) .$$

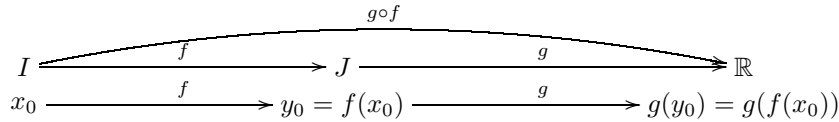
Proposition 2 Für zwei Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^p(I)$ gilt:

$$\begin{aligned} T_{p,f+g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) &= T_{p,f}(x) + T_{p,g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ T_{p,f-g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) &= T_{p,f}(x) - T_{p,g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ T_{p,fg}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) &= T_{p,f}(x)T_{p,g}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) \end{aligned}$$

Proposition 3 Seien I, J zwei offene Intervalle aus \mathbb{R} .

Seien $f : I \rightarrow J$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen der Klasse \mathcal{C}^p .

Seien $x_0 \in I$ und $y_0 := f(x_0)$. Im Bild:



Seien $T_{p,f} = T_{p,f,x_0}$ und $T_{p,g} = T_{p,g,y_0}$ die zugehörigen TAYLOR-Polynome für f und g um x_0 bzw. y_0 . Dann gilt für das TAYLOR-Polynom von der Ordnung p für die Verkettung $g \circ f$ um x_0 :

$$T_{p,g \circ f, x_0}(x) = T_{p,g, y_0} \circ T_{p,f, x_0}(x) + \mathcal{O}(x^{p+1}) .$$

1.2 Aufgaben

Aufgabe 4

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1-x} , \quad x \in I .$$

LÖSUNG: Wir beweisen durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) := [\quad \text{Es gilt } f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1} \quad] .$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr: Die "nullte" Ableitung von f ist die Funktion f selbst, also gilt: $f^{(0)}(x) = f(x) = 1/(1-x) = 0!(1-x)^{-0-1}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [n!(1-x)^{-n-1}]' = n! \cdot (-n-1)(1-x)^{-n-2} \cdot (1-x)' \\ &= (n+1)!(1-x)^{-(n+1)-1} . \end{aligned}$$

So ist die Aussage $A(n+1)$ auch wahr.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Es gilt insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = n!(1-0)^{-n-1} = n! .$$

Das gesuchte TAYLOR-Polynom ist also:

$$T_p(x) = \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k = \sum_{0 \leq k \leq p} x^k = 1 + x + \dots + x^p .$$

Ein maple-Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1-x) , x=0 , 11 );
      2   3   4   5   6   7   8   9   10   11
1 + x + x + x + x + x + x + x + x + x + x + 0(x )
```

Aufgabe 5

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1+x}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Die Funktion f entsteht als Verknüpfung der Funktionen $x \rightarrow -x$ und $y \rightarrow 1/(1-y)$. Aus diesem Grund ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^p + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= \underbrace{1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p x^p}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$T_p(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p x^p.$$

Ein maple-Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1+x) , x=0 , 11 );
      2   3   4   5   6   7   8   9   10   11
1 - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x + O(x )
```

Aufgabe 6

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1/a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1+ax}, \quad x \in I.$$

Dabei ist $a > 0$ eine reelle Zahl.

LÖSUNG: Die Funktion f entsteht als Verknüpfung der Funktionen $x \rightarrow -ax$ und $y \rightarrow 1/(1-y)$. Aus diesem Grund ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+ax} = \frac{1}{1-(-ax)} = 1 + (-ax) + (-ax)^2 + \dots + (-ax)^p + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= \underbrace{1 - ax + a^2 x^2 - \dots + (-1)^p a^p x^p}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$T_p(x) = 1 - ax + a^2 x^2 - \dots + (-1)^p a^p x^p.$$

Ein maple-Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1+a*x) , x=0 , 7 );
      2   2   3   3   4   4   5   5   6   6   7
1 - a x + a x - a x + a x - a x + a x + O(x )
```

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in I.$$

Die Funktion f entsteht als Verknüpfung der Funktionen $x \rightarrow -x^2$ und $y \rightarrow 1/(1-y)$. Aus diesem Grund ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \dots + (-x^2)^p + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^p x^{2p} + \mathcal{O}(x^{p+1}) = \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k x^{2k} + \mathcal{O}(x^{p+1}) \\ &= \underbrace{\sum_{0 \leq k \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^k x^{2k}}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}) = \underbrace{1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} x^{2 \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}}_{T_p(x)} + \mathcal{O}(x^{p+1}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$T_p(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} x^{2 \lfloor \frac{p}{2} \rfloor}.$$

Ein maple-Beispiel dazu:

```
> taylor( 1/(1+x^2) , x=0 , 21 );
      2    4    6    8    10    12    14    16    18    20    22
1 - x + x - x + x - x + x - x + x - x + x + 0(x )
```

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 11 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arctan x, \quad x \in I.$$

Hinweis: Die Ableitung von \arctan wurde in der letzten Aufgabe behandelt.

LÖSUNG: Die Ableitung von F ist die Funktion

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Das TAYLOR-Polynom von der Ordnung

$$p - 1 = 10$$

für diese Ableitung wurde in der letzten Aufgabe berechnet:

$$T_{p,f',x_0=0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}.$$

Dann ist das TAYLOR-Polynom von f diejenige polinomiale Funktion, welche

▷ eine Stammfunktion von $T_{p,f',x_0=0}(x)$ ist und

▷ an der Stelle $x_0 = 0$ mit f übereinstimmt.

Aus $\arctan = 0$ folgt dann:

$$T_{p,f,x_0=0}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}.$$

Der maple-Code:

```
> taylor( arctan(x) , x=0 , 11 );
      3      5      7      9      11
x - 1/3 x + 1/5 x - 1/7 x + 1/9 x + O(x )
```

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 20 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{1 + 4x^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Setzt man $y = -4x^2$ (oder (un)genauer $y = x^2 + \mathcal{O}(x^{21})$) in die Entwicklung

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots + y^{20} + \mathcal{O}(y^{21})$$

ein, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+4x^2} &= \frac{1}{1-(-4x^2)} \\ &= 1 + (-4x^2) + (-4x^2)^2 + \dots + (-4x^2)^{10} + (-4x^2)^{11} + \dots + (-4x^2)^{20} + \mathcal{O}(x^{21}) \\ &= 1 + (-4x^2) + (-4x^2)^2 + \dots + (-4x^2)^{10} + \mathcal{O}(x^{21}) \\ &= \underbrace{1 - 4x^2 + 4^2x^4 - 4^3x^6 + \dots + 4^{10}x^{20}}_{T_{20}(x)} + \mathcal{O}(x^{21}). \end{aligned}$$

Der maple–Code:

```
> taylor( 1/(1+4*x^2) , x=0 , 21 );
      2      4      6      8      10      12      14      16
1 - 4 x + 16 x - 64 x + 256 x - 1024 x + 4096 x - 16384 x + 65536 x
      18      20      22
- 262144 x + 1048576 x + O(x )
```

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 10 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{1 + 4x^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{x}{1 + 4x^2} = x \cdot \frac{1}{1 + 4x^2} \\ &= (x + \mathcal{O}(x^{11})) \cdot (1 - 4x^2 + 16x^4 - 64x^6 + 256x^8 - 1024x^{10} + \mathcal{O}(x^{11})) \\ &= x - 4x^3 + 16x^5 - 64x^7 + 256x^9 - 1024x^{11} + \mathcal{O}(x^{11}) \\ &= x - 4x^3 + 16x^5 - 64x^7 + 256x^9 + \mathcal{O}(x^{11}). \end{aligned}$$

Der maple–Code:

```
> taylor( x/(1+4*x^2) , x=0 , 11 );
      3      5      7      9      11
x - 4 x + 16 x - 64 x + 256 x + O(x )
```

Aufgabe 11

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 6 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := 4 \sin^2(\cos(x) - 1) - \tan^4(x), \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Wir berechnen zuerst:

$$\begin{aligned} \cos(x) - 1 &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \mathcal{O}(x^7), \\ \sin(\cos(x) - 1) &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right)^5 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^7) \\ &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 \right) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2!}x^2 \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}0 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^7) \\ &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{3!} \frac{1}{2!^3} x^6 \right) + \mathcal{O}(x^7), \end{aligned}$$

(Eigentlich spielt der Term in x^6 bald keine Rolle mehr, da wir quadrieren:)

$$\begin{aligned} \sin^2(\cos x - 1) &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2!^2}x^4 - 2 \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4!}x^6 + \mathcal{O}(x^7) \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \mathcal{O}(x^7). \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5), \\ \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2!}x^2\right) + \left(\frac{1}{2!}x^2\right)^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right) \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5),\end{aligned}$$

was man schneller erhalten kann.

$$\begin{aligned}\tan^4 x &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)^4 \\ &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) + \binom{4}{2}x^2 \left(\frac{1}{3}x^3\right)^2 + \dots + \mathcal{O}(x^7) \\ &= x^4 + 4x^3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^7) \\ &= x^4 + \frac{4}{3}x^6 + \mathcal{O}(x^7), \\ 4\sin^2(\cos x - 1) - \tan^4 x &= 4\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \mathcal{O}(x^7)\right) - \left(x^4 + \frac{4}{3}x^6 + \mathcal{O}(x^7)\right) \\ &= -\frac{3}{2}x^6 + \mathcal{O}(x^7).\end{aligned}$$

■

Der maple-Code:

```
> taylor( 4*(sin(cos(x)-1))^2-tan(x)^4 , x=0 , 7 );
      6      8
- 3/2 x  + 0(x )
```

Man kann natürlich auch die Zwischenschritte durch maple entsprechend überprüfen.

Aufgabe 12

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 5 um $x_0 = 1$ für die polynomiale Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 1, \quad x \in I$$

- mit der Definition,
- mit dem Horner-Schema,
- mit maple,
- mit der Substitution $x = 1 + (x - 1) = 1 + h$, wobei $h := (x - 1)$ ist.

LÖSUNG:

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Definition. Die maple-Unterstützung ist zwecks Vereinfachung der Tipparbeit unabdingbar:

```
f := x^5-3*x^4+4*x^3+5*x^2-x-1 ;
ableitung[0] := f;
for n from 1 to 5 do
  ableitung[n] := diff( f , x$n );
od:
for n from 0 to 5 do
  print( n, ableitung[n] , subs(x=1, ableitung[n]) );
od:
```

Es entstehen als Ergebnisse:

```

      5      4      3      2
0, x  - 3 x  + 4 x  + 5 x  - x - 1, 5

      4      3      2
1, 5 x  - 12 x  + 12 x  + 10 x - 1, 14

      3      2
2, 20 x  - 36 x  + 24 x + 10, 18

      2
3, 60 x  - 72 x + 24, 12

4, 120 x - 72, 48

5, 120, 120
```

Durch Komma getrennt sind dabei in jeder Zeile:

n laufend von 0 bis 5, die n -te Ableitung von f , und der Wert dieser n -ten Ableitung von f an der Stelle 0.

Das TAYLOR-Polynom von f ist also:

$$5 + \frac{1}{1!}14x + \frac{1}{2!}18x^2 + \frac{1}{3!}12x^3 + \frac{1}{4!}48x^4 + \frac{1}{5!}120x^5 .$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit dem Horner-Schema:

	1	-3	4	5	-1	-1
1	1	-2	2	7	6	5
1	1	-1	1	8	14	
1	1	0	1	9		
1	1	1	2			
1	1	2				
1	1					

Wir lesen das TAYLOR-Polynom ab:

$$\boxed{5} + \boxed{14}(x-1) + \boxed{9}(x-1)^2 + \boxed{2}(x-1)^3 + \boxed{2}(x-1)^4 + \boxed{1}(x-1)^5 .$$

Berechnung des Taylor-Polynoms mit maple:

```
> f := x^5-3*x^4+4*x^3+5*x^2-x-1 ;
      5      4      3      2
f := x  - 3 x  + 4 x  + 5 x  - x - 1

> taylor( f , x=1 , 6 );
      2      3      4      5
5 + 14 (x - 1) + 9 (x - 1)  + 2 (x - 1)  + 2 (x - 1)  + (x - 1)
```

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Substitution $x = 1 + (x - 1) = 1 + h$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x - 1 \\
 &= (1+h)^5 - 3(1+h)^4 + 4(1+h)^3 + 5(1+h)^2 - (1+h) - 1 \\
 &= (1+5h+10h^2+10h^3+5h^4+h^5) \\
 &\quad - 3(1+4h+6h^2+4h^3+h^4) \\
 &\quad + 4(1+3h+3h^2+h^3) \\
 &\quad + 5(1+2h+h^2) \\
 &\quad - (1+h) \\
 &\quad - (1) \\
 &= (1-3+4+5-1-1) \\
 &\quad + (5-3\cdot 4+4\cdot 3+5\cdot 2-1)h \\
 &\quad + (10-3\cdot 6+4\cdot 3+5\cdot 1)h^2 \\
 &\quad + (10-3\cdot 4+4\cdot 1)h^3 \\
 &\quad + (5-3\cdot 1)h^4 \\
 &\quad + h^5 \\
 &= 5 + 14h + 9h^2 + 2h^3 + 2h^4 + h^5 .
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man mit maple nach gleicher Idee vorgehen:

```

> f := x^5-3*x^4+4*x^3+5*x^2-x-1 ;
      5      4      3      2
      f := x  - 3 x  + 4 x  + 5 x  - x - 1

> T := subs( x=1+h , f );
      5      4      3      2
      T := (1 + h)  - 3 (1 + h)  + 4 (1 + h)  + 5 (1 + h)  - 2 - h

> expand(T);
      2      3      4      5
      5 + 14 h + 9 h  + 2 h  + 2 h  + h

```



Aufgabe 13

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 4 um $x_0 = -2$ für die polynomiale Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x^5, \quad x \in I$$

- mit der Definition,
- mit dem Horner-Schema,
- mit maple,
- mit der Substitution $x = -2 + (x - (-2)) = -2 + h$, wobei $h := (x - (-2)) = (x + 2)$ ist.

Berechnung des Taylor-Polynoms mit der Definition. Die Ableitungen von f und die entsprechenden Werte in -2 sind:

$$f(x) = x^5, \quad f(-2) = (-2)^5 = -32, \quad f'(x) = 5x^4, \quad f'(-2) = 5(-2)^4 = 80, \quad f''(x) = 4 \cdot 5x^3, \quad f''(-2) = 4 \cdot 5(-2)^3 = -160,$$

Das TAYLOR-Polynom von f von der Ordnung 4 ist also:

$$-32 + \frac{1}{1!}80x + \frac{1}{2!}(-160)x^2 + \frac{1}{3!}240x^3 + \frac{1}{4!}240x^4 .$$

Berechnung des Taylor–Polynoms mit dem Horner–Schema:

	1	0	0	0	0	0
-2	1	-2	4	-8	16	-32
-2	1	-4	12	-32	80	
-2	1	-6	24	80		
-2	1	-8	40			
-2	1	-10				

Wir lesen das TAYLOR–Polynom ab:

$$\boxed{-32} + \boxed{80}(x+2) + \boxed{80}(x+2)^2 + \boxed{40}(x+2)^3 + \boxed{-10}(x+2)^4 .$$

Berechnung des Taylor–Polynoms mit maple:

> f := x^5 ;

$$f := x^5$$

> taylor(f , x=-2 , 5);

$$- 32 + 80 (x + 2) - 80 (x + 2)^2 + 40 (x + 2)^3 - 10 (x + 2)^4 + 0((x + 2)^5)$$

Berechnung des Taylor–Polynoms mit der Substitution $x = -2 + h$

$$\begin{aligned} f(x) &= (-2 + h)^5 \\ &= \binom{5}{0}(-2)^5 + \binom{5}{1}(-2)^4 h + \binom{5}{2}(-2)^3 h^2 + \binom{5}{3}(-2)^2 h^3 + \binom{5}{4}(-2)h^4 + \mathcal{O}(h^5) \\ &= (-2)^5 + 5(-2)^4 h + 10(-2)^3 h^2 + 10(-2)^2 h^3 + 5(-2)h^4 + \mathcal{O}(h^5) \dots \end{aligned}$$

Alternativ kann man mit maple nach gleicher Idee vorgehen:

> f := x^5 ;

$$f := x^5$$

> T := subs(x=-2+h , f);

$$T := (-2 + h)^5$$

> expand(T);

$$-32 + 80 h - 80 h^2 + 40 h^3 - 10 h^4 + h^5$$



Aufgabe 14

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 8 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \sin(1 - \cos(x)) , \quad x \in I .$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(1 - \cos(x)) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}(x^9)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}(x^9)\right) \\ &\quad - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!}\left(\mathcal{O}(x^2)\right)^5 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^9) \\ &= \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8\right) \\ &\quad - \frac{1}{3!}\left(\binom{3}{0}\frac{1}{2!^3}(x^2)^3 - \binom{3}{1}\frac{1}{2!^2}(x^2)^2\left(\frac{1}{4!}x^4\right)^1 + \mathcal{O}(x^9)\right)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(x^9) \\ &= \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{3!}\binom{3}{0}\frac{1}{2!^3}\right)x^6 + \left(-\frac{1}{8!} + \frac{1}{3!}\binom{3}{1}\frac{1}{2!^2}\frac{1}{4!}\right)x^8 + \mathcal{O}(x^9) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{7}{360}x^6 + \frac{209}{40320}x^8 + \mathcal{O}(x^9). \end{aligned}$$

■

```
> taylor(sin(1-cos(x)) , x=0 , 9 );
      2      4      6      209      8      9
1/2 x  - 1/24 x  - 7/360 x  + ----- x  + 0(x )
                               40320
```

Aufgabe 15

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 4 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x \exp(-x^2), \quad x \in I.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &:= x \exp(-x^2) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \mathcal{O}(x^5)\right) \\ &= x - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^5) \\ &= x - x^3 + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned}$$

Das TAYLOR-Polynom der Ordnung 4 ist also:

$$T(x) = x - x^3.$$

■

```
> taylor( x*exp(-x^2) , x=0 , 5 );
      3      5
x - x  + 0(x )
```

Aufgabe 16**Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 3 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare)****Funktion $f : I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$,**

$$f(x) := \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)} \\ &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right) \\ &= x + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^4) = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4). \\ \frac{1-y}{1+y} &= (1-y)\frac{1}{1+y} = (1-y)(1-y+y^2-y^3+\mathcal{O}(y^4)) \\ &= 1 - 2y + 2y^2 - 2y^3 + \mathcal{O}(y^4). \end{aligned}$$

setzt man nun für y die TAYLOR–Entwicklung für $\tan x$ ein, so bekommt man:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \\ &= 1 - 2(\tan x) + 2(\tan x)^2 - 2(\tan x)^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^2 - 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - 2\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) + 2x^2 - 2x^3 + \mathcal{O}(x^4) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4). \end{aligned}$$

■

```
> taylor( (1-tan(x))/(1+tan(x)) , x=0 , 4 );
      2      3      4
1 - 2 x + 2 x - 8/3 x + O(x )
```

Aufgabe 17**Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 10 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare)****Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,**

$$f(x) := \frac{1}{1 + x - 2x^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Zuerst wird die Partialbruchzerlegung für $f(x)$ durchgeführt:

> f := 1/(1+x-2*x^2) ;

$$f := \frac{1}{1 + x - 2x^2}$$

> convert(f , parfrac , x);

$$\frac{2}{3} \frac{1}{2x + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1}$$

Wir verwenden direkt diese Ergebnisse:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{1 + x - 2x^2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - x} \\ &= \frac{2}{3} \cdot (1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots + 1024x^{10}) \\ &\quad + \frac{1}{3} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10}) + \mathcal{O}(x^{10}) \\ &= \frac{1}{3} \left((2 + 1) + (-4 + 1)x + (8 + 1)x^2 + (-16 + 1)x^3 + \dots + (2048 + 1)x^{10} \right) + \mathcal{O}(x^{10}) = \dots \end{aligned}$$

■

> taylor(f , x=0 , 11);

$$1 - x + 3x^2 - 5x^3 + 11x^4 - 21x^5 + 43x^6 - 85x^7 + 171x^8 - 341x^9 + 683x^{10} + \mathcal{O}(x^{11})$$

Aufgabe 18

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 5 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{3 - 7x + 4x^3}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Zuerst wird die Partialbruchzerlegung für $f(x)$ durchgeführt:

> f := 1/(3-7*x+4*x^3) ;

$$f := \frac{1}{3 - 7x + 4x^3}$$

> convert(f , parfrac , x);

$$\frac{1}{5} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{10} \frac{1}{2x + 3} - \frac{1}{2} \frac{1}{2x - 1}$$

Wir verwenden direkt diese Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= \frac{1}{3-7x+4x^3} \\
 &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-2x} \\
 &= -\frac{1}{5} (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\
 &\quad + \frac{1}{30} \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{16}{81}x^4 - \frac{32}{243}x^5 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (1-2x+4x^2-8x^3+16x^4-32x^5) + \mathcal{O}(x^6).
 \end{aligned}$$

■

> taylor(f , x=0 , 6);

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{9}x + \frac{49}{27}x^2 + \frac{307}{81}x^3 + \frac{1897}{243}x^4 + \frac{11515}{729}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

Aufgabe 19

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Es gilt $f(x) = (1+x)^{-2}$.

Wir beweisen durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) := [\quad \text{Es gilt } f^{(n)}(x) = (n+1)!(-1)^n(1+x)^{-(n+2)} \quad].$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr: Die "nullte" Ableitung von f ist die Funktion f selbst, also gilt: $f^{(0)}(x) = f(x) = (1+x)^{-2} = 1!(-1)^0(1+x)^{-(0+2)}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [(n+1)!(-1)^n(1+x)^{-(n+2)}]' \\
 &= (n+1)!(-1)^n \cdot (-(n+2))(1+x)^{-(n+2)-1} \\
 &= (n+2)!(-1)^{n+1}(1+x)^{-(n+3)}.
 \end{aligned}$$

So ist die Aussage $A(n+1)$ auch wahr.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Es gilt insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = (n+1)!(-1)^n(1+0)^{-n-2} = (n+1)!(-1)^n.$$

Das gesuchte TAYLOR-Polynom ist also:

$$\begin{aligned}
 T_p(x) &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x-0)^k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} (-1)^k (k+1)! x^k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k (k+1) x^k.
 \end{aligned}$$

■

Ein maple-Beispiel dazu:

```
> taylor( 1/(1+x)^2 , x=0 , 9 );
      2      3      4      5      6      7      8      9
1 - 2 x + 3 x - 4 x + 5 x - 6 x + 7 x - 8 x + 9 x + 0(x )
```

Aufgabe 20

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung p um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^3}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: Es gilt $f(x) = (1+x)^{-3}$.

Wir beweisen durch vollständige Induktion die folgende Aussage $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n) := [\quad \text{Es gilt } f^{(n)}(x) = \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n (1+x)^{-(n+3)} \quad] .$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(0)$ ist wahr: Die “nullte” Ableitung von f ist die Funktion f selbst, also gilt: $f^{(0)}(x) = f(x) = (1+x)^{-3} = \frac{2!}{2!} (-1)^0 (1+x)^{-(0+3)}$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass $A(n)$ eine wahre Aussage ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= [f^{(n)}(x)]' = [\frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n (1+x)^{-(n+3)}]' \\ &= \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n \cdot (-(n+3)) (1+x)^{-(n+3)-1} \\ &= \frac{(n+3)!}{2!} (-1)^{n+1} (1+x)^{-(n+3)}. \end{aligned}$$

So ist die Aussage $A(n+1)$ auch wahr.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. Es gilt insbesondere:

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n (1+0)^{-(n+3)} = \frac{(n+2)!}{2!} (-1)^n .$$

Das gesuchte TAYLOR–Polynom ist also:

$$\begin{aligned} T_p(x) &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) (x-0)^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} \frac{1}{k!} (-1)^k \frac{(k+2)!}{2!} x^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} x^k . \end{aligned}$$

Ein maple–Beispiel dazu: ■

```
> taylor( 1/(1+x)^3 , x=0 , 9 );
      2      3      4      5      6      7      8      9
1 - 3 x + 6 x - 10 x + 15 x - 21 x + 28 x - 36 x + 45 x + 0(x )
```

Aufgabe 21

Berechnen Sie das Taylor–Polynom der Ordnung 10 um $x_0 = 0$ für die (unendlich oft differenzierbare) Funktion $f : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{(1+3x^2)^3}, \quad x \in I.$$

LÖSUNG: In der letzten Aufgabe haben wir gezeigt, dass gilt:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - 3y + 6y^2 - 10y^3 + 15y^4 - 21y^5 + \mathcal{O}(y^6).$$

Wir setzen nun für y den Wert $y = 3x^2$ ein und bekommen:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{(1+3x^2)^3} \\ &= 1 - 3(3x^2) + 6(3x^2)^2 - 10(3x^2)^3 + 15(3x^2)^4 - 21(3x^2)^5 + \mathcal{O}(x^{11}) \\ &= 1 - 9x^2 + 54x^4 - 270x^6 + 1215x^8 - 5103x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}). \end{aligned}$$

■

```
> taylor( 1/(1+3*x^2)^3 , x=0 , 11 );  
      2      4      6      8      10      12  
1 - 9 x  + 54 x  - 270 x  + 1215 x  - 5103 x  + 0(x  )
```

Kapitel 2

Der Satz von l'Hospital

2.1 Theorie

Proposition 22 (l'Hospital – der Fall $\frac{0}{0}$) Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Sei $a \in I'$ ein (endlicher oder unendlicher) Berührungspunkt von I . Dies bedeutet für $a \in \mathbb{R}$ (a endlich), dass I für ein geeignetes $\epsilon > 0$ ein Unterintervall von der Form

$$(a - \epsilon, a) \quad \text{oder} \quad (a, a + \epsilon) \quad \text{oder} \quad (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

beinhaltet. Für ein unendliches $a = \pm\infty$ bedeutet dies, dass I ein Intervall von der Form $(?, \infty)$ oder $(-\infty, ??)$ ist.

Seien

$$f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen. Wir nehmen an, dass folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

- Es existieren die Grenzwerte $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = 0$.
- Die Funktionen f, g sind auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar.
- Die Funktion g nimmt auf $I \setminus \{a\}$ den Wert Null **nicht** an.
- Es existiert der (endliche oder unendliche) Grenzwert $l := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$.

Dann existiert der (endliche oder unendliche) Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} \in [-\infty, +\infty]$ und es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Proposition 23 (l'Hospital – der Fall $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$) Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Sei $a \in I'$ ein (endlicher oder unendlicher) Berührungspunkt von I .

Seien

$$f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen. Wir nehmen an, dass folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert der Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} |g(x)| = \infty$.
- Die Funktionen f, g sind auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar.
- Die Funktion g nimmt auf $I \setminus \{a\}$ den Wert Null **nicht** an.
- Es existiert der (endliche oder unendliche) Grenzwert $l := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$. **Dann existiert**

der (endliche oder unendliche) Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} \in [-\infty, +\infty]$ und es gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l .$$

2.2 Anwendungen des Satzes von l'Hospital in den unbestimmten Fällen $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0

2.2.1 Der Fall $\infty - \infty$

Der Fall $\infty - \infty$ reduziert sich oft auf den Fall $\frac{0}{0}$ durch die Gleichheit:

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} .$$

(Dabei sind f, g geeignete Funktionen mit $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = \infty$.) Falls etwa $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ gilt, dann ist die Umformung

$$f - g = \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$$

leichter handzuhaben.

2.2.2 Der Fall $\infty \cdot 0$

Der Fall $\infty \cdot 0$ reduziert sich auf den Fall $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ durch die Gleichheit:

$$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{oder} \quad fg = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

(Dabei sind f, g geeignete Funktionen mit $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} f(x) = \infty$, und $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I}} g(x) = 0$.)

2.2.3 Die Fälle 1^∞ , 0^0 , ∞^0

Durch die Gleichheit:

$$f^g = (\exp(\ln f))^g = (e^{\ln f})^g = e^{g \ln f}$$

und die Stetigkeit der Exponential-Funktion kann man diese Fälle auf bereits behandelte Fälle reduzieren.

2.3 Aufgaben

Aufgabe 24

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+a}{x} \right)$.

LÖSUNG: Es handelt sich um den Fall $\infty - \infty$. Seien f, g die Funktionen $f, g : (2002, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x, \quad g(x) := x^2 \ln \frac{x+a}{x}.$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

In der Aufgabe handelt sich eventuell um den "konsistenten Fall" $\infty - \infty$, da der Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+a}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{und weiter mit L'HOSPITAL} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= a. \end{aligned}$$

(Der konsistente Fall kommt also nur im Falle $a = 1$ vor.)

> f := x ;

f := x

> g := x^2*ln(1+a/x) ;

g := x^2 ln(1 + a/x)

> limit(g/f , x=infinity);

a

Wir berechnen des weiteren standardmässig:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Der Zähler konvergiert gegen $1 - a$, der Nenner (mit positiven Werten) gegen Null. Aus diesem Grund ist der Grenzwert gleich $+\infty$ im Falle $a < 1$ und $-\infty$ im Falle $a > 1$. Im Falle $a = 1$ handelt es sich in $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ um den Fall $\frac{0}{0}$. Wir wenden dann den Satz von L'HOSPITAL nach geeigneter Umformung an und bekommen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, kann angewandt werden:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1}{x} - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]'}{\left[\frac{1}{x^2} \right]'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-2\frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1 + \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1}}{-2\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+a}{x} \right) = \begin{cases} +\infty & a < 1 \\ 1/2 & a = 1 \\ -\infty & a > 1 \end{cases}$$

■

```
> f := x ; g := x^2*ln(1+a/x) ;
      f := x
      2
      g := x ln(1 + a/x)
> limit( f-g , x=infinity ) ;
      -signum(-1 + a) infinity
```

und speziell im Falle a=1:

```
> f := x ; g := x^2*ln(1+1/x) ; limit( f-g , x=infinity ) ;
      f := x
      2
      g := x ln(1 + 1/x)
      1/2
```

2. Lösung Wir betrachten nur den Fall $a = 1$. Durch die Substitution $x = 1/h$, $h = 1/x$ und der Verwendung der TAYLOR-Entwicklung:

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \dots \pm \frac{h^p}{p} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

haben wir sofort:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \ln(1+h) \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \left(h - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3) \right) \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \left[\frac{1}{h} - \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h) \right) \right] \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{2} + \mathcal{O}(h) = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

■

Aufgabe 25

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right)$
mittels der Taylor-Polynome,
mittels des Satzes von l'Hospital.

LÖSUNG:

Lösung durch Verwendung der Taylor-Polynome: Wir haben bereits die Entwicklung mehrmals festgestellt:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5) .$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2} \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) - 1}{1 + \mathcal{O}(x)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\frac{2}{3}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{1 + \mathcal{O}(x)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + \mathcal{O}(x)}{1 + \mathcal{O}(x)} = \frac{2}{3} + \mathcal{O}(x). \end{aligned}$$

Der gesuchte Grenzwert ist also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} \right) = \frac{2}{3}.$$

```
> limit( x^(-2) - tan(x)^(-2) , x=0 );
      2/3
```

Lösung durch den Satz von l'Hospital:

In dieser Lösung berechnen wir für

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{\tan^2 x - x^2}{x^2 \tan^2 x}$$

die ersten Ableitungen der Zähler- bzw. Nenner-Funktionen f bzw. g , bis der Wert einer/beider Ableitungen in 0 nicht mehr verschwindet. Es gilt in diesem Sinne:

```
f := tan(x)^2 - x^2 ;
g := x^2 * tan(x)^2 ;
for n from 1 to 4 do
  print( diff(f,x$n) , diff(g,x$n) );
  print( simplify[trig](subs( x=0 , diff(f,x$n) ) ) ,
        simplify[trig](subs( x=0 , diff(g,x$n) ) ) );
od:
```

```
      2      2      2      2
2 tan(x) (1 + tan(x) ) - 2 x , 2 x tan(x) + 2 x tan(x) (1 + tan(x) )
      0, 0
      2 2      2      2      2
2 (1 + tan(x) ) + 4 tan(x) (1 + tan(x) ) - 2, 2 tan(x)
      2      2      2 2
+ 8 x tan(x) (1 + tan(x) ) + 2 x (1 + tan(x) )
      2      2      2
+ 4 x tan(x) (1 + tan(x) )
      0, 0
      2 2      3      2      2
16 (1 + tan(x) ) tan(x) + 8 tan(x) (1 + tan(x) ) , 12 tan(x) (1 + tan(x) )
      2 2      2      2
+ 12 x (1 + tan(x) ) + 24 x tan(x) (1 + tan(x) )
```

$$\begin{aligned}
& + 16 x^2 (1 + \tan(x))^2 \tan(x) + 8 x^3 \tan(x) (1 + \tan(x))^2 \\
& 0, 0 \\
& 88 (1 + \tan(x))^2 \tan(x)^2 + 16 (1 + \tan(x))^2 \tan(x)^3 + 16 \tan(x)^4 (1 + \tan(x))^2, \\
& 24 (1 + \tan(x))^2 + 48 \tan(x)^2 (1 + \tan(x))^2 + 128 x (1 + \tan(x))^2 \tan(x) \\
& + 64 x^3 \tan(x) (1 + \tan(x))^2 + 88 x^2 (1 + \tan(x))^2 \tan(x) \\
& + 16 x^2 (1 + \tan(x))^2 \tan(x)^3 + 16 x^4 \tan(x)^2 (1 + \tan(x))^2 \\
& 16, 24
\end{aligned}$$

Die wiederholte Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL ist dann ("möglich"):

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(IV)}(x)}{g^{(IV)}(x)} = \frac{f^{(IV)}(0)}{g^{(IV)}(0)} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

■

Aufgabe 26

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}$
mittels der Taylor-Polynome,
mittels des Satzes von l'Hospital.

LÖSUNG:

Lösung durch Verwendung der Taylor-Polynome: Diese Lösung ist erneut die einfachere Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)\right)^n}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^n\right]}{x^{n+2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)^n}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} \cdot \frac{1}{3!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{3!} + \mathcal{O}(x) = \frac{n}{6}
\end{aligned}$$

■

Es gilt zum Beispiel:

```
> n := 7 ; limit( ( x^n -sin(x)^n )/x^(n+2) , x=0 );
n := 7
```

7/6

Lösung durch den Satz von l'Hospital (und Umformung):

Wir bemerken zuerst die Relation:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 .$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \left[1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \right]}{x^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n}{x^2}$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, kann nun angewandt werden. (Der Zähler konvergiert gegen $1 - 1^n = 1 - 1 = 0$.)

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \right]'}{\left[x^2 \right]'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-n \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{n-1} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} \\ &= n \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{n-1}}_{=1^{n-1}=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{2x^3} \\ &= \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \end{aligned}$$

Der Satz von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, kann nun angewandt werden.

$$\begin{aligned} &= \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - x \cos x]'}{[x^3]'} = \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + x \sin x - \cos x}{3x^2} = \frac{n}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{n}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= \frac{n}{6} . \end{aligned}$$

■

Aufgabe 27

Seien $a, b > 0$. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right)$

LÖSUNG:

Falls $a = b$ gilt, dann ist der gesuchte Grenzwert gleich Null.

Wir nehmen aus diesem Grund $a \neq b$ an.

Nach Umformung und Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(1-x^b) - b(1-x^a)}{(1-x^a)(1-x^b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[a(1-x^b) - b(1-x^a)]'}{[(1-x^a)(1-x^b)]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ab(x^{a-1} - x^{b-1})}{-ax^{a-1} - bx^{b-1} + (a+b)x^{a+b-1}} \\ &= ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - x^b}{-ax^a - bx^b + (a+b)x^{a+b}} \end{aligned}$$

(Der letzte Schritt ist nur psychologisch von Bedeutung ...)

$$= ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^a - x^b)/x^b}{(-ax^a - bx^b + (a+b)x^{a+b})/x^b} = ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{a-b} - 1}{-ax^{a-b} - b + (a+b)x^a}$$

und nach Anwendung des Satzes von L'HOSPITAL, Fall $\frac{0}{0}$, erhalten wir:

$$= ab \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a-b)x^{a-b-1}}{-a(a-b)x^{a-b-1} + a(a+b)x^{a-1}} = ab \frac{a-b}{-a(a-b) + a(a+b)} = ab \frac{a-b}{2ab} = a-b.$$

> a:=2002; b:=2001;

a := 2002

b := 2001

> limit(a/(1-x^a) - b/(1-x^b) , x=0);

1

Aufgabe 28

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2}$

LÖSUNG:

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{(nx)^2}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{(nx)^2}{2}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2} - \dots - \frac{(nx)^2}{2}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(2x)^2}{2} + \dots + \frac{(nx)^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + \mathcal{O}(x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \mathcal{O}(x). \end{aligned}$$

Es folgt sofort:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2} = \frac{1}{12} n(n+1)(2n+1).$$

■

Aufgabe 29

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n!x^n - \sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \dots \cdot \sin(nx)}{x^{n+2}}$

LÖSUNG:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \frac{n!x^n - \sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \dots \cdot \sin(nx)}{x^{n+2}} \\
 &= \frac{1}{x^{n+2}} \left[n!x^n - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \left((2x) - \frac{(2x)^3}{3!}\right) \dots \left((nx) - \frac{(nx)^3}{3!}\right) + \mathcal{O}(x^{n+3}) \right] \\
 &= \frac{1}{x^{n+2}} \cdot n!x^n \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{3!}\right) \dots \left(1 - \frac{(nx)^2}{3!}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\
 &= \frac{1}{x^2} n! \left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{3!} - \frac{(2x)^2}{3!} - \dots - \frac{(nx)^2}{3!}\right) + \mathcal{O}(x^3) \right] \\
 &= \frac{1}{x^2} n! \left[\frac{x^2}{3!} + \frac{(2x)^2}{3!} + \dots + \frac{(nx)^2}{3!} + \mathcal{O}(x^3) \right] \\
 &= \frac{n!}{3!} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + \mathcal{O}(x) \\
 &= \frac{n!}{6} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \mathcal{O}(x) .
 \end{aligned}$$

Es folgt sofort:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \dots \cdot \cos(nx)}{x^2} = \frac{n!}{36} n(n+1)(2n+1) .$$

Es gilt zum Beispiel:

```
f := ( 5!*x^5 - sin(x)*sin(2*x)*sin(3*x)*sin(4*x)*sin(5*x) )/x^7 ;
limit( f , x=0 );
result := 5!/36 * 5*6*11;
```

$$f := \frac{5 \cdot 120 x^5 - \sin(x) \sin(2 x) \sin(3 x) \sin(4 x) \sin(5 x)}{x^7}$$

```
> limit( f , x=0 );
```

1100

```
result := 1100
```

Aufgabe 30

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[e - \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x \right]$

LÖSUNG:

```
f := x*( exp(1) - (1+1/(x+1))^x );
limit(f , x=infinity );
```

```
> f := x*( exp(1) - (1+1/(x+1))^x );
```

$$f := x \left| \exp(1) - \left| 1 + \frac{1}{x+1} \right|^x \right|$$

```
> limit(f , x=infinity );
```

3/2 exp(1)

Aufgabe 31

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8)^{1/2} - (x+242)^{1/5}}{(x+3)^{1/2} - (x+31)^{1/5}}$.

LÖSUNG:

```
f := ( (x+8)^(1/2)-(x+242)^(1/5) )/( (x+3)^(1/2)-(x+31)^(1/5) );
simplify( limit(f , x=1 ) );
```

```
> f := ( (x+8)^(1/2)-(x+242)^(1/5) )/( (x+3)^(1/2)-(x+31)^(1/5) );
```

$$f := \frac{(x+8)^{1/2} - (x+242)^{1/5}}{(x+3)^{1/2} - (x+31)^{1/5}}$$

```
> simplify( limit(f , x=1 ) );
```

56
--
81

Aufgabe 32

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \tan^a x)^{1/(\sin x - \cos x)}$.

LÖSUNG:

```
f := (2-tan(x)^a)^(1/(sin(x)-cos(x)));
limit( f , x=Pi/4 );
```

```
> f := (2-tan(x)^a)^(1/(sin(x)-cos(x)));
```

$$f := (2 - \tan(x))^{\frac{1}{\sin(x) - \cos(x)}}$$

```
> limit( f , x=Pi/4 );
```

1/2
exp(-a 2)

Aufgabe 33

Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x - \sin^3(\sin x) - \frac{1}{2}x^5}{x^7}$.

LÖSUNG:

```
taylor( x^3*cos(x) , x=0 , 8 );
taylor( sin(sin(x))^3 , x=0 , 8 );
taylor( x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2 , x=0 , 8 );
limit( (x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2) / (x^7) , x=0 );
```

```

> taylor( x^3*cos(x) , x=0 , 8 );
      3      5      7      9
x  - 1/2 x  + 1/24 x  + 0(x )

> taylor( sin(sin(x))^3 , x=0 , 8 );
      3      5      19      7      9
x  - x  + --- x  + 0(x )
      30

> taylor( x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2 , x=0 , 8 );
      71      7      9
- --- x  + 0(x )
      120

> limit( (x^3*cos(x)-sin(sin(x))^3-x^5/2) / (x^7) , x=0 );
      -71
      ---
      120

```



Kapitel 3

Untersuchung der lokalen Extrema mit Hilfe der Ableitungen

3.1 Theorie

Proposition 34 Sei I ein offenes Intervall in \mathbb{R} .

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse $C^p(I)$, $p \geq 2$.

Sei $x_0 \in I$ eine Stelle.

Falls x_0 eine strikte lokale Extremstelle für das TAYLOR-Polynom $T_p(x)$ ist, **dann** ist x_0 auch eine strikte lokale Extremstelle für f .

Falls x_0 eine strikte lokale Wendestelle für das TAYLOR-Polynom $T_p(x)$ ist, **dann** ist x_0 auch eine strikte lokale Wendestelle für f .

Insbesondere:

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ ist, dann hat das TAYLOR-Polynom

$$T_2(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

ein striktes lokales Extremum an der Stelle x_0 , also auch die Funktion f .

Insbesondere allgemeiner:

Falls $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(p-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(p)}(x_0) \neq 0$ ist, dann hat das TAYLOR-Polynom

$$T_p(x) = f(x_0) + \frac{1}{p!}f^{(p)}(x_0)(x - x_0)^p$$

ein striktes lokales Extremum an der Stelle x_0 für gerades p und eine strikte lokale Wendestelle für ungerades p .

Entsprechendes gilt also auch für die Funktion f .

3.2 Aufgaben

Aufgabe 35

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x \exp(-x^2)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 36

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \left(\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} \right)^{1/2}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 37

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x + \sin x$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 38

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := (x + 1) \exp(-x^2)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 39

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{1 + x^2} \exp(-x^2)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 40

Untersuchen Sie die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 1)(x + 7)^2}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.
Dabei ist I das maximale Definitionsbereich von f in \mathbb{R} .

Aufgabe 41

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x(x + 1)(x + 5)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 42

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := x(x+1)(x+5)(x+6)$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 43

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 44

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 45

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 46

Untersuchen Sie die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 47

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Aufgabe 48

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

auf Asymptoten, Monotonie und lokale und globale Extrema.

Kapitel 4

Integrale

4.1 Theorie

Proposition 49 Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Dann existiert eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$F' = f .$$

Definition 50 Eine Funktion F wird **Stammfunktion** oder **unbestimmtes Integral** von f genannt und mit

$$\int f(x) dx$$

bezeichnet, falls F differenzierbar ist und die Relation gilt:

$$F' = f .$$

Proposition 51 Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Seien $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von f . Dann ist die Differenz-Funktion

$$F_1 - F_2$$

eine konstante Funktion.

Observation 52 Falls I eine Vereinigung von mehreren disjunkten Intervallen ist, dann unterscheiden sich zwei Stammfunktionen einer stetigen Funktion f auf I (nicht unbedingt durch eine konstante Funktion aber) durch eine Funktion, welche auf jedem Teilintervall von I konstant ist.

Proposition 53 Sei $I = [a, b]$ ein Intervall in \mathbb{R} . Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine **stetige** Funktion. Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann hängt die Differenz

$$F(b) - F(a)$$

nicht von der Wahl der Stammfunktion F ab. Diese Differenz wird mit

$$\int_a^b f(x) dx$$

bezeichnet.

Proposition 54 (Partielle Integration) Sei I ein Intervall in \mathbb{R} . Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf I . Dann gilt:

$$\int f'(x)g(x) dx = (fg)(x) - \int f(x)g'(x) dx .$$

Proposition 55 (Partielle Integration) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall in \mathbb{R} . Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen auf I . Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx .$$

Dabei steht $[fg]_a^b$ für die Differenz $(fg)(b) - (fg)(a)$.

4.2 Standard-Integrale

Die folgenden Funktionen f haben auf dem maximalen Definitionsbereich D die Stammfunktion F . Man kann dies durch den einfacheren Prozess der Ableitung leicht nachprüfen.

f	F	$x \in D$	
x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + \mathcal{C}$	$x \in (0, \infty)$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ beliebig
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$ oder $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ beliebig
x^{-1}	$\ln x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$\sin x$	$-\cos x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\exp x$	$\exp x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	$a \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + \mathcal{C}$	$x \in \mathbb{R}$	$a > 0$

4.3 Standard-Integrationstechniken

Es gibt eine unendliche Liste \mathcal{L} von Funktionen, welche ausgehend von den Standard-Funktionen (polynomiale Funktionen, \sin , \cos , \exp , ...) durch wiederholte Bildung von Summen, Differenzen, Produkten, Verkettungen, Umkehrfunktionen entstehen. Man kann leicht beweisen, dass die Ableitung einer Funktion aus dieser Liste \mathcal{L} auch in \mathcal{L} liegt.

Diese Liste ist jedoch **nicht** abgeschlossen bzgl. der Integralbildung.

Die Stammfunktion der Funktion $x \rightarrow \exp(-x^2)$, welche offensichtlich zur Liste \mathcal{L} gehört, ist nicht in \mathcal{L} , und die einfachste Bezeichnung für eine Stammfunktion ist:

$$x \rightarrow \int_{-\infty}^x \exp(-t^2) dt + \mathcal{C} .$$

Aus diesem Grund ist es wichtig zu wissen, welche Typen von Funktionen integriert werden können.

4.3.1 Rationale Funktionen

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei polynomiale Funktionen, welche auf dem Intervall I definiert sind, so dass g keine Nullstellen in I zulässt. Dann ist die Quotientenfunktion $R : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$R(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

wohldefiniert. Jede Funktion von diesem Typ wird **rational Funktion** genannt.

Für die Zwecke der Untersuchung der Stammfunktion von R können wir zuerst annehmen, dass der Grad von f streng kleiner als der Grad von g ist. (Sonst kann man sich durch die Division mit Rest für Polynome und polynomiale Funktionen auf diesen Fall reduzieren.)

Die Integration einer rationalen Funktion wird in den folgenden Schritten erzielt:

- Man findet alle reellen und komplexen Nullstellen von g . Dieser Schritt ist bereits nicht algorithmisch: Es gibt keine allgemeine Formel für die Nullstellen der Polynome mit Grad größer oder gleich fünf. Spezielle Polynome mit **ganzen** Koeffizienten können nach rationalen Nullstellen untersucht werden. Die rationalen Nullstellen eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten sind immer von der Form:

$$\pm \frac{\text{Teiler des freien Koeffizienten}}{\text{Teiler des Haupt-Koeffizienten}} .$$

Die Suche nach solche Nullstellen kann algorithmisch gestaltet werden.

Seien a_1, \dots, a_k die **verschiedenen reellen** Nullstellen von g , welche mit gewissen Vielfachheiten (Multiplizitäten) ν_1, \dots, ν_k vorkommen, so dass gilt:

$$g(X) = (X - a_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (X - a_k)^{\nu_k} \cdot q(X) ,$$

so dass $q(X)$ nur komplexe Nullstellen zulässt. Diese Nullstellen kommen dann in komplex konjugierten Paaren (– wenn überhaupt –) von der Form $\beta + i\gamma, \beta - i\gamma, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, vor. Die Vielfachheiten μ von $\beta + i\gamma$ und $\beta - i\gamma$ stimmen überein.

Das Produkt $(X - (\beta + i\gamma))(X - (\beta - i\gamma))$ ist dann das **reelle** Polynom

$$X^2 - 2\beta X + (\beta^2 + \gamma^2) =: X^2 + bX + c$$

für geeignete reelle Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$.

Man hat also eine Produkt-Darstellung für g

$$g(X) = (X - a_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (X - a_k)^{\nu_k} \cdot (X^2 + b_1X + c_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (X^2 + b_lX + c_l)^{\mu_l} ,$$

welche in reellen Polynomen nicht mehr weiter faktorisiert (zerlegt) werden kann.

- **[Partialbruchzerlegung]** Man kann dann die rationale Funktion $R(X)$ als lineare Kombination der "elementaren" rationalen Funktionen schreiben:

$$\frac{1}{(X - a_1)^1} ; \frac{1}{(X - a_1)^2} ; \dots ; \frac{1}{(X - a_1)^{\nu_1}} ;$$

.....

$$\frac{1}{(X - a_k)^1} ; \frac{1}{(X - a_k)^2} ; \dots ; \frac{1}{(X - a_k)^{\nu_k}} ;$$

$$\frac{1}{(X^2 + b_1X + c_1)^1} , \frac{X}{(X^2 + b_1X + c_1)^1} ; \dots ; \frac{1}{(X^2 + b_1X + c_1)^{\mu_1}} , \frac{X}{(X^2 + b_1X + c_1)^{\mu_1}} ;$$

.....

$$\frac{1}{(X^2 + b_lX + c_l)^1} , \frac{X}{(X^2 + b_lX + c_l)^1} ; \dots ; \frac{1}{(X^2 + b_lX + c_l)^{\mu_l}} , \frac{X}{(X^2 + b_lX + c_l)^{\mu_l}} .$$

Die Integration der rationalen Funktion $R(X)$ reduziert sich auf die Integration der rationalen Funktionen in der obigen Liste.

- Das Integral obigen Funktionen, welche vom Typ

$$\frac{1}{(X - a)^n} = (X - a)^{-n}$$

sind ist leicht: Eine Stammfunktion ist z.B.

$$\frac{1}{1-n} (X - a)^{1-n} \text{ für } n \neq 1 \quad \text{oder} \quad \ln |X - a| \text{ für } n = 1 .$$

- Durch eine eventuelle geeignete Substitution (quadratische Erweiterung in $(X^2 + bX + c)$) reduziert sich des weiteren das Integral jeder der restlichen rationalen Funktionen auf das Integral eine Funktion von der Form:

$$\frac{1}{(X^2 + a^2)^n} \quad \text{oder} \quad \frac{X}{(X^2 + a^2)^n} .$$

Das zweite Integral lässt sich sofort mit einer Substitution $y = x^2$ berechnen:

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{dy}{(y + a^2)^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} (y + a^2)^{1-n} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-n} (x^2 + a^2)^{1-n} + C .$$

Das erste Integral ist schwieriger zu berechnen. Wir führen die Notation ein:

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} .$$

Das Integral I_1 ist ein Standard-Integral, das arctan ins Spiel bringt.

Für $n \geq 2$ hat man eine Rekursionsformel, welche durch partielle Integration hergeleitet wird.

Um die Verbindung zwischen I_n und I_{n+1} herzustellen, "verkomplizieren" wir durch partielle Integration die Formel von I_n :

$$\begin{aligned} I_n &:= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \int x' \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = x \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \cdot \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \right)' dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x \cdot \left((-n) \frac{2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right) dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}) . \end{aligned}$$

Wir erhalten also die rekursive Verbindung:

$$2na^2 I_{n+1} = (2n - 1)I_n + \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} .$$

4.3.2 Funktionen der Form $R(\exp x)$

Sei R eine rationale Funktion. Dann reduziert die Substitution

$$t := e^x$$

die Berechnung der Stammfunktion für $R(e^x)$ auf die Berechnung der Stammfunktion der rationalen Funktion $R(t)/t$: Es gilt formal:

$$\int R(e^x) dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} e^x dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} d(e^x) = \int \frac{R(t)}{t} dt \dots$$

4.3.3 Funktionen der Form $R(\sin x, \cos x)$

Sei R eine rationale Funktion von zwei Variablen. Dann reduziert die Substitution

$$t := \tan \frac{x}{2}$$

die Berechnung der Stammfunktion für $R(\sin x, \cos x)$ auf die Berechnung der Stammfunktion einer anderen rationalen Funktion: Es gilt formal:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} , \\ \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} , \\ x &= 2 \arctan t , \\ dx &= \frac{2}{1 + t^2} dt , \\ \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} dt . \end{aligned}$$

Oft ist es möglich und dann einfacher, eine der Substitutionen $u = \sin x$, $u = \cos x$ oder $t = \tan x$ durchzuführen.

4.3.4 Funktionen der Form $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right)$

Für Integrale vom Typ $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right) dx$ mit einer rationalen Funktion R (Quotient von Polynomen in mehreren Variablen), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Substitution $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ empfehlenswert, wobei k der gemeinsame Nenner (kgV der Nenner) der Brüche q_1, \dots, q_n ist.

4.3.5 Funktionen vom Typ $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ und die eulerschen Substitutionen

Für Integrale vom Typ $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$ mit einer rationalen Funktion R , $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, ist eine der EULERSchen Substitutionen empfehlenswert:

- Für $a > 0$ setzt man $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.
- Für $a < 0$, $c > 0$ setzt man $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.
- Seien x_1, x_2 die Nullstellen der Funktion $x \rightarrow ax^2 + bx + c$. Man setzt $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x-x_1)$.

4.3.6 Binomische Integrale

Für Integrale vom Typ $\int x^m (ax^n + b)^p dx$ mit $m, n, p \in \mathbb{Q}$ ist eine der folgenden Substitutionen empfehlenswert:

- Für $p \in \mathbb{Z}$ setzt man $x = t^q$, wobei q der gemeinsame Nenner der Brüche m, n ist.
- Für $p \notin \mathbb{Z}$, aber $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ setzt man $ax^n + b = t^s$, wobei s der Nenner der rationalen Zahl p ist.
- Für $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$, aber $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ substituiert man $\frac{ax^n + b}{x^n} = a + bx^{-n} = t^s$, wobei s der Nenner der rationalen Zahl p ist.

4.4 Aufgaben

4.4.1 Integrale rationaler Funktionen

Aufgabe 56

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$ und $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$.

Aufgabe 57

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Aufgabe 58

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Aufgabe 59

Berechnen Sie $\int \frac{x \, dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

Aufgabe 60

Berechnen Sie $\int \frac{x \, dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Aufgabe 61

Berechnen Sie für jede der folgenden gebrochen rationalen Funktionen den maximalen Definitionsbereich in \mathbb{R} , die Partialbruchzerlegung und eine Stammfunktion:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}{x^6 - 2x^4 + x^2}, \quad \frac{-x^3 + 10x^2 - 31x + 31}{x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 171x^2 + 216x - 108}, \quad \frac{-x^4 + x^3 + x - 1}{x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

Aufgabe 62

Berechnen Sie $\int \frac{x^8 + 1}{x^4 + 1} \, dx$.

Aufgabe 63

Berechnen Sie $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} \, dx$.

Aufgabe 64

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^6 - 1}$.

Aufgabe 65

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

Aufgabe 66

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Aufgabe 67

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)}$.

Aufgabe 68

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)^2}$.

4.4.2 Integrale rational exponentieller Funktionen

Es handelt sich dabei um Integrale von Funktionen der Form $R(\exp x)$.

Aufgabe 69

Berechnen Sie $\int \frac{e^x + 1}{e^x + 2} dx$.

Aufgabe 70

Berechnen Sie $\int \frac{e^x + 1}{(e^x + 2)^2} dx$.

Aufgabe 71

Berechnen Sie $\int \frac{e^x + 1}{(e^{2x} + 1)^2} dx$.

4.4.3 Integrale trigonometrischer Funktionen

Es handelt sich dabei um Integrale von Funktionen der Form $R(\sin x, \cos x)$.

Aufgabe 72

Berechnen Sie $\int \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$.

Aufgabe 73

Berechnen Sie $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} dx$.

Aufgabe 74

Berechnen Sie $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$.

Aufgabe 75

Berechnen Sie $\int \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$.

4.4.4 Integrale von Funktionen der Form $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{q_n}\right)$

Aufgabe 76

Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$$\frac{1}{x} \sqrt[3]{1-x}, \quad \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1+x}}, \quad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} + 1}, \quad \frac{1}{(x+2)\sqrt{1+x}}.$$

4.4.5 Integrale der Funktionen vom Typ $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ und die eulerschen Substitutionen

Aufgabe 77

Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$$\frac{1}{x\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}, \quad \frac{x}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}, \quad \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}, \quad \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$$

4.4.6 Binomische Integrale

Aufgabe 78

Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$$\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{1}{x^2(1+x^2)^{3/2}}, \quad \sqrt[4]{\frac{x}{1+x^5}}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{1+x^{n+1}}}, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Kapitel 5

Probeklausur

Aufgabe 79

Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für

$$S_N := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

und beweisen Sie direkt oder durch vollständige Induktion die entsprechende Formel. Dabei ist $N \geq 1$ eine natürliche Zahl.

LÖSUNG: Einige maple-Versuche lassen sofort ahnen, wie der geschlossene Ausdruck für die Summe auszusehen hat:

```
S := n -> sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..n );
for n from 1 to 10 do
  print( n, S(n), evalf(S(n)) );
od;
for n from 100 to 105 do
  print( n, S(n), evalf(S(n)) );
od;
```

```
> S := n -> sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..n );
```

```
          n
-----
      \
      )  '-----'
      /   k (k + 1) (k + 2)
-----
      'k' = 1
```

```
> for n from 1 to 10 do
>   print( n, S(n), evalf(S(n)) );
> od;
```

```
1, 1/6, .1666666667
2, 5/24, .2083333333
3, 9/40, .2250000000
4, 7/30, .2333333333
5, 5/21, .2380952381
```

27

```

6, ---, .2410714286
112

35
7, ---, .2430555556
144

11
8, --, .2444444444
45

27
9, ---, .2454545455
110

65
10, ---, .2462121212
264

> for n from 100 to 105 do
>   print( n, S(n), evalf(S(n)) );
> od;

2575
100, -----, .2499514657
10302

1313
101, -----, .2499524081
5253

5355
102, -----, .2499533234
21424

5459
103, -----, .2499542125
21840

1391
104, -----, .2499550764
5565

2835
105, -----, .2499559161
11342

```

Offensichtlich konvergiert die Folge (S_N) gegen $0.25 = 1/4$. Es liegt nahe, den Abstand $1/4 - S(n)$ zu berechnen:

```

for n from 1 to 10 do
  print( n, 1/4-S(n) );
od;

```

```

1, 1/12
2, 1/24
3, 1/40
4, 1/60

```

- 5, 1/84
- 6, 1/112
- 7, 1/144
- 8, 1/180
- 9, 1/220
- 10, 1/264

Wenn immer noch keine Vermutung in der Luft liegt, dann verlangen wir von maple alles:

`sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..N);`

`> sum('1/k/(k+1)/(k+2)', 'k'=1..N);`

$$1 - \frac{1}{2(N+2)(N+1)} + \frac{1}{4}$$

Wir beweisen nun durch vollständige Induktion die Aussage:

$$A(N) := \left[\text{Es gilt } \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \right], \quad N \in \mathbb{N}, N \geq 1.$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist wahr, denn es gilt:

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1+1)(1+2)}.$$

Induktionsschritt: Sei $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Aussage $A(n)$ gilt. Dann können wir berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \right) \end{aligned}$$

da die Aussage $A(n)$ wahr ist,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{N+3} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{(N+3) - 2}{2(N+3)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{(N+1)(N+2)} \cdot \frac{N+1}{2(N+3)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+2)(N+3)}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die Aussage $A(n+1)$ wahr ist.

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$, wahr. ■

Alternativer Beweis durch "teleskopische" Kürzungen: Es gilt:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right].$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{N(N+1)(N+2)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right] + \cdots + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N \cdot (N+1)} - \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(N+1) \cdot (N+2)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)}. \end{aligned}$$

■

Aufgabe 80

Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Ordnung 3 um 1 für die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^x$.

LÖSUNG: Wir substituieren $x = 1 + h$ und untersuchen die Funktion $g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(h) := (1 + h)^{1+h}$ um $h = 0$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(h) &= (1 + h)^{1+h} \\ &= \exp(\ln(1 + h))^{1+h} \\ &= \exp((1 + h) \ln(1 + h)). \end{aligned}$$

Wir haben die TAYLOR-Entwicklungen:

$$\begin{aligned} \ln(1 + h) &= h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^4), \\ (1 + h) \ln(1 + h) &= (1 + h) \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \right) + \mathcal{O}(h^4) \\ &= h + \left(1 - \frac{1}{2} \right) h^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) h^3 + \mathcal{O}(h^4) \\ &= h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Schließlich gilt:

$$\begin{aligned} g(h) &= \exp((1 + h) \ln(1 + h)) \\ &= 1 + \left(h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 \right)^3 + \mathcal{O}(h^4) \\ &= 1 + \left(h + \frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{6} h^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h^2 + 2 \frac{1}{2} h^3 + \mathcal{O}(h^4) \right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} (h^3 + \mathcal{O}(h^4)) + \mathcal{O}(h^4) \\ &= 1 + h + h^2 + \frac{1}{2} h^3 + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

```
taylor( x^x , x=1 );
taylor( (1+h)*ln(1+h) , h=0 );
taylor( (1+h)^(1+h) , h=0 );
```

```
> taylor( x^x , x=1 );
      2      3      4      5      6
1 + x - 1 + (x - 1) + 1/2 (x - 1) + 1/3 (x - 1) + 1/12 (x - 1) + 0((x - 1) )
```

```
> taylor( (1+h)*ln(1+h) , h=0 );
      2      3      4      5      6
h + 1/2 h - 1/6 h + 1/12 h - 1/20 h + 0(h )
```

```
> taylor( (1+h)^(1+h) , h=0 );
      2      3      4      5      6
1 + h + h + 1/2 h + 1/3 h + 1/12 h + 0(h )
```

Aufgabe 81

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \right]$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\sqrt{x^2 + 1} - x \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 82

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{\tan(\arcsin x) - \arcsin(\tan x)}$

```
taylor( tan(sin(x)) - sin(tan(x)) , x=0 , 8);
taylor( tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) , x=0 , 8);
f := tan(sin(x)) - sin(tan(x)) ;
g := tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) ;
limit( f/g , x=0 );
```

```

> taylor( tan(sin(x)) - sin(tan(x)) , x=0 , 8);
              7      8
            1/30 x  + 0(x )

> taylor( tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) , x=0 , 8);
              7      9
            - 1/30 x  + 0(x )

> f := tan(sin(x)) - sin(tan(x)) ;
      f := tan(sin(x)) - sin(tan(x))

> g := tan(arcsin(x)) - arcsin(tan(x)) ;
              x
      g := ----- - arcsin(tan(x))
              2 1/2
            (1 - x )

> limit( f/g , x=0 );
              -1

```

Aufgabe 83

Berechnen Sie das Integral:

$$J := \int_2^3 \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx .$$

LÖSUNG: Wir berechnen direkt durch die Substitution $y = x^2$:

$$\begin{aligned}
 J &= \int_2^3 \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} d(x^2) \\
 &= \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{y(y + 1)^2} dy .
 \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung: Gesucht sind A, B, B' in der Darstellung:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{y(y + 1)^2} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{y + 1} + \frac{B'}{(y + 1)^2} \quad \text{oderäquivalent} \\
 1 &= A(y + 1)^2 + By(y + 1) + B'y .
 \end{aligned}$$

Setzt man die Werte $0, -1, 1$ für y ein, so folgt daraus: $1 = A$, $1 = -B'$ und $1 = 4A + 2B + B'$. Es folgt die Darstellung:

$$\frac{1}{y(y + 1)^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y + 1} - \frac{1}{(y + 1)^2} .$$

```

> convert( 1/y/(y+1)^2 , parfrac , y );
              1      1
      1/y - ----- - -----
              2      y + 1
            (y + 1)

```

Man kann nun leicht integrieren:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_4^9 \frac{1}{y(y+1)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_4^9 \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln|y| - \ln|y+1| + \frac{1}{y+1} \right]_4^9 = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{10}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{10} \right) - \frac{1}{20} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8} - \frac{1}{20} \\ &= \ln 3 - \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

■

```
> int( 1/x/(x^2+1)^2 , x=2..3 );  
ln(3) - 3/2 ln(2) - 1/20
```

Aufgabe 84

Untersuchen Sie das Schaubild der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$, $f(x) := (2x+3)e^{-x^2/2}$.

(Asymptoten, Monotonie, Konvexität/Konkavität, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte.)

LÖSUNG: Die ersten zwei Ableitungen von f sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2 - x(2x+3)] e^{-x^2/2} &&= -(x+2)(2x-1)e^{-x^2/2}, \\ f''(x) &= [-(4x+3) + (2x^2+3x-2)x] e^{-x^2/2} = (2x^3+3x^2-6x-3)e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

- Die Funktion f hat die einzige Nullstelle bei $a = -3/2$.
- Die Funktion f' hat die Nullstellen bei $b_1 = -2$, $b_2 = 1/2$.
- Die Funktion f'' hat keine rationalen Nullstellen. Annäherungen der Werte der Nullstellen von f'' oder äquivalent von $(2x^3+3x^2-6x-3) = 0$ sind:

```
> fsolve( 2*x^3+3*x^2-6*x-3 = 0 );  
-2.469001750, -.4332540387, 1.402255789
```

Wir bezeichnen diese drei Werte mit c_1, c_2, c_3 , $c_1 < c_2 < c_3$.

Die Tabelle der Variation für f ist dann:

■

Aufgabe 85

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := \sin x$.

Berechnen Sie die Funktion $\mathcal{L}f = (\mathcal{L}f)(p)$ für $p > 0$

$$F(p) := (\mathcal{L}f)(p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx$$

- direkt durch zweifache partielle Integration und
- durch die Eigenschaften der Laplace-Transformation.

LÖSUNG:

Direkte Berechnung durch zweifache partielle Integration:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f)(p) &:= \int_0^\infty \sin(x) e^{-px} dx = \int_0^\infty [-\cos(x)]' e^{-px} dx \\ &= [-\cos(x)e^{-px}]_0^\infty - \int_0^\infty (-\cos(x)) [e^{-px}]'_x dx = 1 - p \int_0^\infty \cos(x) e^{-px} dx \\ &= 1 - p \int_0^\infty [\sin(x)]' e^{-px} dx = 1 - p \left\{ [\sin(x) e^{-px}]_0^\infty - \int_0^\infty \sin(x) [e^{-px}]'_x dx \right\} \\ &= 1 - p \left\{ 0 + p \int_0^\infty \sin(x) e^{-px} dx \right\} = 1 - p^2(\mathcal{L}f)(p) .\end{aligned}$$

Aus

$$(\mathcal{L}f)(p) = 1 - p^2(\mathcal{L}f)(p)$$

folgt jedoch sofort

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f)(p)(p^2 + 1) &= 1 , \\ (\mathcal{L}f)(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} .\end{aligned}$$

Berechnung durch die Eigenschaften der Laplace-Transformation: Die Funktion $f(x) := \sin x$ erfüllt $f(0) = \sin(0) = 0$, $f'(0) = \sin'(0) = 1$ und die Differenzialgleichung: ■

$$f'' + f = 0 , \quad \sin'' + \sin = 0 .$$

Es folgt durch die LAPLACE-Transformation, welche auf der der Differenzialgleichung angewandt wird, für die Funktion $F(p) := (\mathcal{L}f)(p)$:

$$\begin{aligned}[p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)] + F(p) &= 0 , \\ F(p)(p^2 + 1) &= pf(0) + f'(0) = 1 , \\ F(p) &= \frac{1}{p^2 + 1}\end{aligned}$$

> f := sin(x);

f := sin(x)

> with(inttrans): laplace(f , x , p);

$$\frac{1}{p^2 + 1}$$

Aufgabe 86

Lösen Sie die Differenzialgleichung:

$$f'' - 4f' + 3f = e^{2x} , \quad f(0) = f'(0) = 1 .$$

LÖSUNG: Durch die LAPLACE-Transformation entsteht aus der gegebenen Differenzialgleichung eine algebraische Gleichung, welche "einfacher" gelöst werden kann:

Sei $F = F(p)$ die LAPLACE-Transformation der Funktion $f = f(x)$. Dann folgt:

$$[p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)] - 4[pF(p) - f(0)] + 3F(p) = \frac{1}{p-2},$$

$$F(p)(p^2 - 4p + 3) = pf(0) + f'(0) - 4f(0) + \frac{1}{p-2}$$

$$= p - 3 + \frac{1}{p-2} = \frac{p^2 - 5p + 7}{p-2},$$

$$F(p) = \frac{p^2 - 5p + 7}{(p-2)(p^2 - 4p + 3)} = \frac{p^2 - 5p + 7}{(p-2)(p-1)(p-3)}.$$

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{p^2 - 5p + 7}{(p-2)(p-1)(p-3)}$ ist:

```
F := (p^2-5*p+7) / ((p-1)*(p-2)*(p-3)) ;
convert( F , parfrac , p );
```

```
> F := (p^2-5*p+7) / ((p-1)*(p-2)*(p-3)) ;
```

$$F := \frac{p^2 - 5p + 7}{(p-1)(p-2)(p-3)}$$

```
> convert( F , parfrac , p );
```

$$\frac{3}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p-3}$$

Die inverse LAPLACE-Transformation liefert sofort:

$$f(x) = -\frac{3}{2}e^x - e^2x + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

■

```
dsolve( { diff(f(x),x,x)-4*diff(f(x),x)+3*f(x) = exp(2*x), f(0)=1, D(f)(0)=1} , f(x) );
```

```
> dsolve( { diff(f(x),x,x)-4*diff(f(x),x)\
> +3*f(x) = exp(2*x), f(0)=1, D(f)(0)=1} , f(x) );
```

$$f(x) = -\exp(2x) + \frac{3}{2} \exp(x) + \frac{1}{2} \exp(3x)$$

Aufgabe 87

Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x + 5}$.

LÖSUNG:

Wir substituieren:

$$\tan \frac{x}{2} = t,$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \arctan t,$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Es folgt **formal**:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x + 5} &= \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \frac{2t}{1+t^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2t^2 + 3t + 3} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{16}} dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \arctan \frac{4\left(t + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{15}} + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \frac{4t + 6}{\sqrt{15}} + C .
 \end{aligned}$$

Einige Schritte auf dem Lösungsweg sind:

```

J := Int( 1/( cos(x)+3*sin(x)+5) , x );
with(student):
changevar( t=tan(x/2) , J , t );
s := 2*t/(1+t^2) ; c := (1-t^2)/(1+t^2) ;
simplify( 1/( c +3*s +5 )*2/(1+t^2) );

```

Die direkte Berechnung ist auch möglich:

```

> int( 1/( cos(x)+3*sin(x)+5) , x );
          1/2                                1/2
2/15 15  arctan(1/30 (8 tan(1/2 x) + 6) 15  )

```