

Probeklausur zur Ingenieur–Mathematik I

Aufgabe 1 (a) Berechnen Sie in \mathbb{C} : $(-i)^{2002}$, $(1 + i\sqrt{3})^{2001}$, $(\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5))^{2002}$.
 (b) Berechnen Sie in \mathbb{F}_7 : 3^{2002} .
 (c) Berechnen Sie in \mathbb{F}_{2003} : 2^{2002} .

LÖSUNG:

(a) Aus $(-i)^4 = 1$ folgt $(-i)^{2002} = (-i)^{2002 \bmod 4} = (-i)^2 \bmod 4 = -1$. Zum gleichen Ergebnis kommt man auch mittels der trigonometrischen Form für $(-i)$:
 $-i = \cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2) = e^{3i\pi/2}$.

Es gilt: $(1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = 2(-1 + i\sqrt{3})$.

Des Weiteren:

$(1 + i\sqrt{3})^3 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 + i\sqrt{3})^2 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot 2(-1 + i\sqrt{3}) = \dots = -8$.

Es folgt $(1 + i\sqrt{3})^3 = (-2)^3$. Aus diesem Grund gilt:

$(1 + i\sqrt{3})^{2001} = [(1 + i\sqrt{3})^3]^{667} = [(-2)^3]^{667} = (-2)^{2001} = -2^{2001}$.

Zum gleichen Ergebnis kommt man auch mittels der trigonometrischen Form für $(1 + i\sqrt{3})$:

$(1 + i\sqrt{3}) = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \cos(2\pi/6) + i\sin(2\pi/6) = e^{2\pi i/6}$.

Es gilt schliesslich:

$(\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5))^{2002} = (\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5))^{2002 \bmod 5} = (\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5))^2 = (\cos(4\pi/5) + i\sin(4\pi/5))$.

(b) In \mathbb{F}_7 gilt $x^6 = 1$ für alle $x \neq 0$ aus \mathbb{F}_7 . Daraus folgt:

$3^{2002} = 3^{2002 \bmod 6} = 3^4 = 19^2 = 2^2 = 4$ in \mathbb{F}_7 .

(c) In \mathbb{F}_{2003} gilt $x^{2002} = 1$ für alle $x \neq 0$ aus \mathbb{F}_{2002} . Daraus folgt:

$2^{2002} = 1$ in \mathbb{F}_{2002} .

Der maple-“Check” für diese Berechnungen ist:

```
a1 := (-I)^2002 :
print( " a1 ist " , expand(a1) );

a2 := expand( (1+I*sqrt(3))^2001 );
a2real := Re(a2) :
a2imag := Im(a2) :
print( (1+I*sqrt(3))^2001 , " hat auch die Darstellung:" );
ifactor( a2real ) ,
  " PLUS " ,
  ifactor( simplify(a2imag/(I*sqrt(3))) ) ,
  " MAL " ,
  (I*sqrt(3));

a3 := ( cos( 2*Pi/5 ) +I*sin( 2*Pi/5 ) )^2002 ; ## maple vereinfacht nicht.

b := 3^2002 mod 7 ;

c := 2^2002 mod 2003 ;

> a1 := (-I)^2002 :
                                     " a1 ist " , -1

> a2 := expand( (1+I*sqrt(3))^2001 );
```

```
a2 := -22962613905485090484656664023553639680446354041773904009552854736515325227847406277\
13318972633012539836891929277974925546894237921726110662851862712333306370782599782906\
24560001377558296480089742857853980126972489563230927292776727894634052080932707941809\
99311632479761788925921124662329907232844394066536268833781796891701120475896961582811\
78018695530008580054334132516610440162644725625835225357666344131979907928362540435597\
16808084319706366503081778867804183841109915567179344078320163914433261165510760851167\
45203105669757283886410901783055156776525035087105760164568554163593090752436970229805\
8752
```

$(1 + I \sqrt[3]{2001})$, " hat auch die Darstellung:"

$-\sqrt[3]{2001}$, " PLUS ", 0, " MAL ", $I \sqrt[3]{2001}$

$a_3 := (\cos(2/5 \text{ Pi}) + I \sin(2/5 \text{ Pi}))^{\sqrt[3]{2001}}$

b := 4

c := 1

■

Aufgabe 2 Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

in jedem der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{2003}$.

LÖSUNG: Wir berechnen in allen Körpern gleichzeitig die Determinante Δ des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \Delta &:= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ &\quad - 7 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 - 7 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 196 + 16 + 16 - 28 - 64 - 28 = 108. \end{aligned}$$

Diese Determinante ist ungleich Null in jedem der Körper: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{2003}$. Aus diesem Grund gibt es eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems in jedem dieser Körpern. Wir finden die Lösung zuerst in diesen Körpern:

Um die Lösung mit den kramerschen Formeln zu geben, berechnen wir zuerst:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \\ \Delta_2 &:= \begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21, \\ \Delta_3 &:= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

In jedem der obigen Körpern lautet also die Lösung:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{108} = \frac{1}{18}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{21}{108} = \frac{7}{36}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{108} = \frac{1}{18}.$$

• In den Körpern $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ können die obigen Ausdrücke nicht mehr vereinfacht werden.

Die einfachste Form der Lösung in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist also

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{18}, x_2 = \frac{7}{36}, x_3 = \frac{1}{18}} \quad \text{Lösung in } \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

• In dem Körper \mathbb{F}_7 gilt $\frac{1}{18} = \frac{1}{4} = 2$, $\frac{7}{36} = \frac{0}{36} = 0$. Die einfachste Form der Lösung in \mathbb{F}_7 ist also

$$\boxed{x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 2} \quad \text{Lösung in } \mathbb{F}_7$$

• In dem Körper \mathbb{F}_{2003} müssen wir vielleicht zuerst das inverse $\frac{1}{36}$ von 36 einfacher ausdrücken. Dafür berechnen wir in \mathbb{Q} zuerst die Kettenbruch-Darstellung der Zahl $\frac{2003}{36}$. Dafür berechnet man die folgenden Brüche:

$$\begin{aligned} 2003/36 &= \boxed{55} + 23/36 ; \\ 36/23 &= \boxed{1} + 13/23 ; \\ 23/13 &= \boxed{1} + 10/13 ; \\ 13/10 &= \boxed{1} + 3/10 ; \\ 10/3 &= \boxed{3} + 1/3 ; \\ 3/1 &= \boxed{3} . \end{aligned}$$

es folgt die Darstellung:

$$2003/36 = [55, 1, 1, 1, 3, 3] .$$

(maple-Code dafür: `convert(2003/36 , confrac)`. Die Übersetzung auf Englisch des Begriffs "Kettenbruch" ist: "continous fraction".) Man berechnet dann den "approximierenden" Bruch zum Kettenbruch $[55, 1, 1, 1, 3]$ durch die umgekehrte Prozedur:

$$\begin{aligned} 1 + 1/3 &= 4/3 ; \\ 1 + 3/4 &= 7/4 ; \\ 1 + 4/7 &= 11/7 ; \\ 55 + 7/11 &= 612/11 ; \end{aligned}$$

Es gilt in \mathbb{Q} dann: $\frac{2003}{36} - \frac{612}{11} = \frac{1}{36 \cdot 11}$. Der Zähler 1 in $\frac{1}{36 \cdot 11}$ entsteht durch die Berechnung in \mathbb{Z} :

$$11 \cdot 2003 - 36 \cdot 612 = 1 .$$

Modulo 2003 ergibt dies:

$$(36)^{-1} = -612 = 1392 \quad \text{in } \mathbb{F}_{2003} .$$

Für die Lösung in \mathbb{F}_{2003} berechnen wir dann in \mathbb{F}_{2003} :

$$1/18 = 2/36 = 2 \cdot (-612) = -1224 = 2003 - 1224 = 779 \quad \text{und}$$

$$7/36 = 7 \cdot (-612) = -4284 = 3 \cdot 2003 - 1224 = 1725. \quad \text{Die einfachste Form der Lösung in } \mathbb{F}_{2003} \text{ ist also}$$

$$\boxed{x_1 = 779, x_2 = 1725, x_3 = 779} \quad \text{Lösung in } \mathbb{F}_{2003}$$

• Wir betrachten nun den Körper \mathbb{F}_2 . Das Gleichungssystem wird zu: $\{x_1 = 1, 0 = 1, x_3 = 1\}$. Es gibt keine Lösung, da $0 \neq 1$ ist.

• Wir betrachten nun den Körper \mathbb{F}_3 . Das Gleichungssystem wird zu: $\{x_1 - x_2 + x_3 = 1, -x_1 + x_2 - x_3 = 1, x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$. Es gibt keine Lösung, da $1 \neq -1$ in \mathbb{F}_3 ist.

Der maple-Check:

```
with(linalg):
eq1 := 7*x1 + 2*x2 + 4*x3 = 1 ;
eq2 := 2*x1 + 4*x2 + 2*x3 = 1 ;
eq3 := 4*x1 + 2*x2 + 7*x3 = 1 ;

print( "Die Loesung in Q,R,C ist: ",
      solve( {eq1,eq2,eq3} , {x1,x2,x3} )
    );
print( "Die Loesung in F2 ist: ",
      msolve( {eq1,eq2,eq3} , 2 )
    );
print( "Die Loesung in F3 ist: ",
```

```

msolve( {eq1,eq2,eq3} , 3 )
);
print( "Die Loesung in F7 ist: ",
msolve( {eq1,eq2,eq3} , 7 )
);
print( "Die Loesung in F2003 ist: ",
msolve( {eq1,eq2,eq3} , 2003 )
);
print( "Die Loesung mittels der kramerschen Formeln:" );
Delta := det( matrix( 3,3, [ [7,2,4], [2,4,2], [4,2,7] ] ) );
Delta1 := det( matrix( 3,3, [ [1,2,4], [1,4,2], [1,2,7] ] ) );
Delta2 := det( matrix( 3,3, [ [7,1,4], [2,1,2], [4,1,7] ] ) );
Delta3 := det( matrix( 3,3, [ [7,2,1], [2,4,1], [4,2,1] ] ) );

Solutions := Delta1/Delta , Delta2/Delta , Delta3/Delta ;

```

Die Ergebnisse dieses Codes sind (ASCII-Format):

$$\text{eq1} := 7 x_1 + 2 x_2 + 4 x_3 = 1$$

$$\text{eq2} := 2 x_1 + 4 x_2 + 2 x_3 = 1$$

$$\text{eq3} := 4 x_1 + 2 x_2 + 7 x_3 = 1$$

"Die Loesung in Q,R,C ist: ", {x3 = 1/18, x2 = 7/36, x1 = 1/18}

"Die Loesung in F2 ist: "

"Die Loesung in F3 ist: "

"Die Loesung in F7 ist: ", {x2 = 0, x1 = 2, x3 = 2}

"Die Loesung in F2003 ist: ", {x3 = 779, x1 = 779, x2 = 1725}

"Die Loesung mittels der kramerschen Formeln:"

$$\text{Delta} := 108$$

$$\text{Delta1} := 6$$

$$\text{Delta2} := 21$$

$$\text{Delta3} := 6$$

$$\text{Solutions} := 1/18, 7/36, 1/18$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A(x) := \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x & 1 & x & x^2 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

und lösen Sie anschließend die Gleichung $\det A(x) = 0$ in der Unbekannten x . In welchem der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_7$ gibt es genau eine Lösung dieser Gleichung?

LÖSUNG: Es gilt durch sukzessive Umformungen:

$$\det A(x) := \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ x^2 & x & \boxed{1} & x \\ x & 1 & x & x^2 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

Wir nutzen den eingerahmten Eintrag um in der dritten Spalte zu eliminieren:

$$\begin{aligned} & := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-x^2 \\ x^2 & x & 1 & x \\ x-x^3 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 1-x^4 & x-x^3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-x^2 \\ x-x^3 & 1-x^2 & 0 \\ 1-x^4 & x-x^3 & 0 \end{vmatrix} = -(1-x^2) \begin{vmatrix} x-x^3 & 1-x^2 \\ 1-x^4 & x-x^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Wir haben dabei zuerst eine Entwicklung nach der 3. Spalte und anschließend nach der 1. Zeile. Wir können im letzten Ausdruck noch faktorisieren:

$$\begin{aligned} & := -(1-x^2) \begin{vmatrix} x(1-x^2) & 1-x^2 \\ (1+x^2)(1-x^2) & x(1-x^2) \end{vmatrix} \\ & = -(1-x^2) \cdot (1-x^2)^2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ (1+x^2) & x \end{vmatrix} \\ & = -(1-x^2) \cdot (1-x^2)^2 \cdot (-1) \\ & = (1-x^2)^3 = (1-x)^3(1+x)^3. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\det A(x) = 0$ hat also nur die Lösungen $1, -1$.

Nur in dem Körper \mathbb{F}_2 (unter den Körpern $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_7$) gilt $1 = -1$.

Eine einzige Lösung der Gleichung $\det A(x) = 0$ gibt es nur in \mathbb{F}_2 .

Der maple-Check:

```
with(linalg):
print( "Die gegebene Matrix A ist:" );
A := matrix( 4,4,
  [ [ x^3 , x^2 ,  x ,  1 ] ,
    [ x^2 ,  x ,  1 ,  x ] ,
    [  x ,  1 ,  x , x^2 ] ,
    [  1 ,  x , x^2 , x^3 ]
  ]
);
print( "Die Determinante der Matrix A ist:" , det(A) );
print( "oder in faktorisierte Form:      " , factor(det(A)) );
```

Die Ergebnisse dieses Codes sind (ASCII-Format):

```
"Die gegebene Matrix A ist:"

      [ 3      2      ]
      [x      x      x      1 ]
      [
      [ 2      ]
      [x      x      1      x ]
A := [
      [
      [
      [x      1      x      x ]
      [
      [
      [
      [1      x      x      x ]

      6      4      2
"Die Determinante der Matrix A ist:", -x  + 3 x  - 3 x  + 1

      3      3
"oder in faktorisierte Form:      ", -(x - 1) (x + 1)
```

Aufgabe 4 Welcher ist der Rang der Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 24 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & -19 & 6 & 1 \\ -1 & -13 & -62 & 15 & -3 \end{bmatrix} ?$$

LÖSUNG: Das Gauss-Verfahren liefert nach wenigen Schritten:

4	1	5	3	6
3	5	24	-3	5
1	-4	-19	6	1
-1	-13	-62	15	-3
4	1	5	3	6
-17	0	-1	-18	-25
17	0	1	18	25
51	0	3	54	75
4	1	5	3	6
-17	0	-1	-18	-25
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Der Rang der gegebenen Matrix ist offensichtlich 2. ■

Der maple-Check ist:

```
with(linalg):
A:=matrix( 4,5,
  [
    [ 4 , 1 , 5 , 3 , 6 ],
    [ 3 , 5 , 24 , -3 , 5 ],
    [ 1 , -4 , -19 , 6 , 1 ],
    [ -1, -13, -62 , 15 , -3 ]
  ]
);
print("Der Rang von A ist: ", rank(A));
```

Die Ergebnisse sind:

```

      [ 4      1      5      3      6]
      [
      [ 3      5      24     -3     5]
A := [
      [ 1      -4     -19     6     1]
      [
      [-1     -13    -62     15    -3]

"Der Rang von A ist: ", 2
```

Aufgabe 5 Man kann zeigen, dass die Untermenge von \mathbb{C}

$$K := \{ x + iy\sqrt{3} : x, y \in \mathbb{Q} \}$$

mit den von \mathbb{C} vererbten Operationen der Addition und Multiplikation von \mathbb{C} ein Körper ist. Wir vergessen diese reiche Struktur und betrachten K als Vektorraum über \mathbb{Q} .

Sei $\xi \in \mathbb{C}$ die Nullstelle der Gleichung $x^3 = 1$, welche streng positiven Imaginäranteil hat.

Bestimmen Sie ξ und zeigen Sie $\xi \in K$.

Zeigen Sie, dass die "Vektoren" $1, \xi$ in K eine Basis \mathcal{B} von K über \mathbb{Q} bilden.

Welche ist die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\xi)$ bzgl. der Basis \mathcal{B} der linearen Abbildung $L : K \rightarrow K$, welche durch Multiplikation mit der Zahl ξ aus K gegeben ist:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{L} & K \\ \alpha & \xrightarrow{\quad} & L(\alpha) := \xi\alpha \end{array} \quad ?$$

Welches ist das charakteristische Polynom von $M_{\mathcal{B}}(L)$?

LÖSUNG:

• Die Gleichung $x^3 = 1$ ist äquivalent zu $(x-1)(x^2+x+1) = 0$. Die Nullstelle 1 kommt nicht in Frage für den ξ -Wert, da der Imaginäranteil von 1 gleich Null (und nicht **streng** positiv) ist.

Die Gleichung $(x^2 + x + 1) = 0$ hat zwei Nullstellen: $(-1 \pm \sqrt{-3})/2 = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$. Es folgt:

$$\xi = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Dieser Wert liegt offensichtlich in K .

• Jedes Element $x + iy\sqrt{3} \in K$, $x, y \in \mathbb{Q}$, lässt sich in Termen des Systems $\mathcal{B} = \{1, \xi\}$ einfach \mathbb{Q} -linear kombinieren: Es gilt zuerst $i\sqrt{3} = 2\xi + 1$, also:

$$x + iy\sqrt{3} = x + y \cdot (2\xi + 1) = \underbrace{(x + y)}_{\text{"Skalar"}} \cdot \underbrace{1}_{\text{"Vektor"}} + \underbrace{2y}_{\text{"Skalar"}} \cdot \underbrace{\xi}_{\text{"Vektor"}} .$$

So ist $\mathcal{B} = \{1, \xi\}$ ein **Erzeugendensystem** von K .

Die lineare Darstellung $x' \cdot 1 + y' \cdot \xi$ mit Skalaren $x', y' \in \mathbb{Q}$ eines Elements aus K in Termen des Systems $\mathcal{B} = \{1, \xi\}$ ist "offensichtlich" eindeutig:

Aus $x'_1 \cdot 1 + y'_1 \cdot \xi = x'_2 \cdot 1 + y'_2 \cdot \xi$ mit $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathbb{Q}$ folgt:

$$\Im(x'_1 \cdot 1 + y'_1 \cdot \xi) = \Im(x'_2 \cdot 1 + y'_2 \cdot \xi) \text{ also}$$

$$\Im(x'_1 \cdot 1) + \Im(y'_1 \cdot \xi) = \Im(x'_2 \cdot 1) + \Im(y'_2 \cdot \xi) \text{ also}$$

$$0 + y'_1 \cdot \Im(\xi) = 0 + y'_2 \cdot \Im(\xi) \text{ also}$$

$$y'_1 = y'_2. \text{ Anschließend folgt sofort } x'_1 = x'_2.$$

So ist $\mathcal{B} = \{1, \xi\}$ ein **linear unabhängiges** System von K .

Es folgt \mathcal{B} **Basis**.

• Wir arbeiten des weiteren mit Spaltenvektoren $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, welche sich ausschließlich auf die Basis \mathcal{B} beziehen:

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ steht für

$$x \cdot (\text{Erster Basisvektor in } \mathcal{B}) + y \cdot (\text{Zweiter Basisvektor in } \mathcal{B}) = x \cdot 1 + y \cdot \xi = x + y\xi .$$

Sei nun $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ beliebig. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^2 & & \mathbb{Q}^2 \\ \left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. \\ K & \xrightarrow{L} & K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} -y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right. \\ x \cdot 1 + y \cdot \xi & \xrightarrow{L} & \xi(x + y\xi) = (-y) \cdot 1 + (x - y) \cdot \xi \end{array}$$

(Die Rechnung $\xi(x + y\xi) = \xi x + \xi^2 y = \xi x + (-1 - \xi)y = (-y) \cdot 1 + (x - y) \cdot \xi$ ist einfach. Wir haben dabei $\xi^2 + \xi + 1 = 0$ verwendet: ξ ist die Nullstelle des Polynoms $x^2 + x + 1$.) Aus dem obigen Diagramm folgt, dass die Matrix $M_{\mathcal{B}}(\xi)$ bzgl. der Basis \mathcal{B} der linearen Abbildung $L : K \rightarrow K$ die folgende ist:

$$M_{\mathcal{B}}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

• Das charakteristische Polynom von $M_{\mathcal{B}}(\xi)$ ist:

$$\lambda^2 + \lambda 1 .$$

Aufgabe 6 Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

Warum sind die Eigenvektoren von A orthogonal zueinander?

Finden Sie anschließend eine invertierbare Matrix S mit $S^* S = E$, so dass die Matrix $S^{-1} A S$ diagonalgestalt hat.

LÖSUNG: Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von A :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (-1)^3 \det(A - \lambda E) = -\det(A - \lambda E)$$

$$\begin{aligned} &= - \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 7 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 7 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = - [(3 - \lambda)^3 + 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \cdot (3 - \lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (3 - \lambda) - 7 \cdot 7 \cdot (3 - \lambda)] \\ &= \lambda^3 - 9\lambda^2 - 30\lambda + 88 . \end{aligned}$$

Man sucht des weiteren die Eigenwerte von A (die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$) z.B. mit dem Horner-Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & -30 & 88 \\ 2 & 1 & -7 & -44 & 0 \\ -4 & 1 & -11 & 0 & \\ 11 & 1 & 0 & & \end{array}$$

Die Eigenwerte sind also: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 11$:

```
with(linalg):
A:=matrix( 3,3,
  [
    [ 3,2,7 ],
    [ 2,3,2 ],
    [ 7,2,3 ]
  ]
);
charpoly(A,lambda);
eigenvalues(A);
```

Die Ergebnisse sind:

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(A,lambda);
```

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 - 30\lambda + 88$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$2, -4, 11$$

Man berechnet leicht nun die folgenden Eigenvektoren:

- Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ findet man z.B. den Eigenvektor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Zum Eigenwert $\lambda_2 = -4$ findet man z.B. den Eigenvektor $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Zum Eigenwert $\lambda_3 = 11$ findet man z.B. den Eigenvektor $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Diese Eigenwerte sind offensichtlich orthogonal zueinander:

$$\begin{array}{lll} v_1^* v_1 = 18 & v_1^* v_2 = 0 & v_1^* v_3 = 0 \\ v_2^* v_1 = 0 & v_2^* v_2 = 2 & v_2^* v_3 = 0 \\ v_3^* v_1 = 0 & v_3^* v_2 = 0 & v_3^* v_3 = 9 \end{array}$$

Dies liegt daran, dass S selbstadjungiert (- für reelle Matrizen auch spiegelsymmetrisch bzgl. der Diagonale genannt -) ist.

Eine Orthonormal-Basis von \mathbb{R}^3 (oder \mathbb{C}^3) ist dann nach Normierung gegeben durch die Vektoren $\{w_1, w_2, w_3\}$:

$$w_1 := \frac{1}{\sqrt{18}} v_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_3 := \frac{1}{\sqrt{9}} v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Matrix S besteht aus den Spaltenvektoren w_1, w_2, w_3 :

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

maple findet ähnliche Eigenvektoren:

```
eigenvectors(A);
> eigenvectors(A);
      [11, 1, {[2, 1, 2]}], [2, 1, {[1, -4, 1]}], [-4, 1, {[ -1, 0, 1]}]
```

Anschließend überprüfen wir mit maple, ob $S^*S = E$ gilt:

```
with(linalg):
```

```
v1 := matrix( 3,1, [ [1] , [-4] , [ 1] ] ) :
v2 := matrix( 3,1, [ [1] , [ 0] , [-1] ] ) :
v3 := matrix( 3,1, [ [2] , [ 1] , [ 2] ] ) :
print( "v1,v2,v3 sind die Vektoren:", v1,v2,v3 );
```

```
w1 := evalm( 1/sqrt(18) * v1 ):
w2 := evalm( 1/sqrt(2)  * v2 ):
w3 := evalm( 1/3       * v3 ):
print( "w1,w2,w3 sind die Vektoren:", w1,w2,w3 );
```

```
S:= augment( w1,w2,w3 ) : # concatenate w1,w2,w3
print( "Die gesuchte Matrix S ist:", S );
```

```
print( " S' S ist: " , evalm( transpose(S) &* S ) );
```

Die Ergebnisse:

```

                                [ 1] [ 1] [2]
                                [ ] [ ] [ ]
"v1,v2,v3 sind die Vektoren:", [-4], [ 0], [1]
                                [ ] [ ] [ ]
                                [ 1] [-1] [2]
```

```

                                [ 1/2 ] [ 1/2 ]
                                [ 1/6 2 ] [ 1/2 2 ] [2/3]
" w1,w2,w3 sind die Vektoren:", [ ] [ ] [ ]
                                [ 1/2 ], [ 0 ], [1/3]
                                [- 2/3 2 ] [ ] [ ]
                                [ ] [ 1/2 ] [2/3]
                                [ 1/2 ] [- 1/2 2 ]
                                [ 1/6 2 ]
```

```

                                [ 1/2      1/2      ]
                                [ 1/6 2      1/2 2      2/3]
"Die gesuchte Matrix S ist:", [ ]
                                [ 1/2      ]
                                [- 2/3 2      0      1/3]
                                [ ]
                                [ 1/2      1/2      ]
                                [ 1/6 2      - 1/2 2      2/3]
```

```

                                [1  0  0]
                                [   ]
" S' S ist: ", [0  1  0]
                                [   ]
                                [0  0  1]
```

Aufgabe 7 Sei $(x_n)_{n \geq 0}$ die rekursiv definierte Folge:

$$x_0 := 1, \quad x_1 := 7, \quad x_2 := 7; \quad x_{n+3} = x_{n+2} + 4x_{n+1} - 4x_n.$$

Finden Sie eine explizite Formel für (x_n) .

LÖSUNG:

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Spaltenvektor:

$$Y_n := \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} .$$

Dann kann man die Drei-Schritt-Rekursion von (x_n) auf eine Ein-Schritt-Rekursion von (Y_n) umformen:

$$Y_{n+1} = \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = AY_n .$$

Dabei ist A die Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} .$$

Es folgt dann sofort für (Y_n) die Formel:

$$Y_n = A^n Y_0 .$$

Aus diesem Grund berechnen wir **explizit** A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Das charakteristische Polynom von A ist:

```
with(linalg):
A:= matrix ( 3,3, [0,1,0, 0,0,1, -4,4,1] );
print( " Das charakteristische Polynom von A ist : ", charpoly(A,lambda) );
print( " Die Eigenwerte von A sind : ", eigenvalues(A) );
print( " Die Eigenvektoren von A sind : ", eigenvectors(A) );
```

- Wir finden eine Basiswechselform S , so dass $S^{-1}AS$ diagonalgestaltet hat: Sie hat als Spaltenvektoren die Eigenvektoren von A :

```
with(linalg):
A:= matrix ( 3,3, [0,1,0, 0,0,1, -4,4,1] );
S := matrix( 3,3, [ 1,1,1, 1,2,-2, 1,4,4 ] );
print( " Die Basiswechselform S ist : ", S );
print( " Die inverse Matrix zu S ist : ", inverse(S) );
print( " Ist die folgende Matrix Lambda diagonal mit den EW als Diagonaleinträge ?" );
Lambda := evalm( inverse(S) &* A &* S );
```

Die Ergebnisse sind:

```

                                [1  1  1]
                                [    ]
" Die Basiswechselform S ist : ", [1  2 -2]
                                [    ]
                                [1  4  4]

                                [4/3  0 -1/3]
                                [    ]
" Die inverse Matrix zu S ist : ", [-1/2  1/4  1/4 ]
                                [    ]
                                [1/6  -1/4  1/12]
```

" Ist die folgende Matrix Lambda diagonal mit den EW als Diagonaleinträge ?"

```

                                [1  0  0]
                                [    ]
Lambda := [0  2  0]
                                [    ]
                                [0  0 -2]
```

- Sei Λ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $1, 2, -2$ (in dieser Reihenfolge). Es folgt aus $S^{-1}AS = \Lambda$ sofort: $A = SAS^{-1}$ und weiter:

$$A^n = SA^n S^{-1} .$$

```

with(linalg):
A:= matrix( 3,3, [0,1,0, 0,0,1, -4,4,1] ):
S := matrix( 3,3, [ 1,1,1, 1,2,-2, 1,4,4 ] ):
LambdaTO_n_th_Power := matrix( 3,3, [1,0,0, 0,2^n,0, 0,0,(-2)^n] ):
print( "Die Formel fuer A hoch n ist:" );
evalm( S &* LambdaTO_n_th_Power &* inverse(S) );
Y0 := matrix( 3,1, [1,7,7] );
print( "Die Formel fuer Yn ist:" );
Yn := evalm( S &* LambdaTO_n_th_Power &* inverse(S) &* Y0);
print( "Die Formel fuer xn ist schliesslich:" );
xn := Yn[1,1];

```

Dies ergibt:

"Die Formel fuer A hoch n ist:"

```

print( "Die Formel fuer xn ist schliesslich:" );
> evalm( S &* LambdaTO_n_th_Power &* inverse(S) );xn := Yn[1,1];

```

$$\begin{bmatrix}
 \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{6} (-2)^n & \frac{1}{4} 2^n - \frac{1}{4} (-2)^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} 2^n + \frac{1}{12} (-2)^n \right] \\
 \left[\frac{4}{3} - 2^n - \frac{1}{3} (-2)^n & \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} (-2)^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} 2^n - \frac{1}{6} (-2)^n \right] \\
 \left[\frac{4}{3} - 2^n + \frac{2}{3} (-2)^n & 2^n - (-2)^n & -\frac{1}{3} + 2^n + \frac{1}{3} (-2)^n \right]
 \end{bmatrix}$$

```
> Y0 := matrix( 3,1, [1,7,7] );
```

$$Y0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
> print( "Die Formel fuer Yn ist:" );
```

"Die Formel fuer Yn ist:"

```
> Yn := evalm( S &* LambdaTO_n_th_Power &* inverse(S) &* Y0);
```

$$Yn := \begin{bmatrix}
 \left[-1 + 3 \cdot 2^n - (-2)^n \right] \\
 \left[-1 + 6 \cdot 2^n + 2 \cdot (-2)^n \right] \\
 \left[-1 + 12 \cdot 2^n - 4 \cdot (-2)^n \right]
 \end{bmatrix}$$

```
> print( "Die Formel fuer xn ist schliesslich:" );
```

"Die Formel fuer xn ist schliesslich:"

```
> xn := Yn[1,1];
```

$$xn := -1 + 3 \cdot 2^n - (-2)^n$$

■

Aufgabe 8 Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ die Matrix mit den Einträgen $a_{i,i} = 2$ für $i = 1, \dots, n$ und $a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = 1$ für $i = 2, \dots, n$ und den sonstigen Einträgen gleich Null. Bestimmen Sie den Rang von A .

LÖSUNG:

Sei A_n (statt einfach nur A) die $n \times n$ Matrix mit Einträgen in \mathbb{R} aus der Aufgabenstellung:

$$A_n := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sei Δ_n die Determinante der obigen Matrix:

$$\Delta_n := \det A_n.$$

Auch wenn die Aufgabe weniger verlangt, beweisen wir die Aussage der folgenden

Behauptung: Die Folge von reellen Zahlen $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ erfüllt die Rekursion:

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3, \quad \Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 3.$$

Für Δ_n ergibt sich daraus (durch vollständige Induktion) die Formel:

$$\Delta_n = (n + 1).$$

Insbesondere ist der Rang der Matrix A_n maximal gleich zu n , da $\det A_n \neq 0$ in \mathbb{R} ist.

Beweis der Behauptung: Sei $n \geq 3$. Wir beweisen zuerst die Rekursion-Formel für $(\Delta_n)_{n \geq 1}$. Die Entwicklung nach der ersten Zeile liefert:

$$\begin{aligned} \Delta_n = \det A_n &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{Determinante einer } (n-1) \times (n-1) \text{ Matrix} \quad \text{Determinante einer } (n-1) \times (n-1) \text{ Matrix} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad \text{Determinante einer } (n-1) \times (n-1) \text{ Matrix} \quad \text{Determinante einer } (n-2) \times (n-2) \text{ Matrix} \\ &= 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}. \end{aligned}$$

(Beim vorletzten Übergang haben wir eine Entwicklung nach der ersten Spalte $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ durchgeführt.)

Die zwei Berechnungen $\Delta_1 = \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} [2] \end{pmatrix}}_{1 \times 1 \text{ matrix}} \right) = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$ sind einfach.

Sei $P_n : n \geq 1$, die folgende logische Aussage/Proposition:

$$P_n := [\text{Für alle } k : 1 \leq k \leq n, \text{ gilt: } \Delta_k = (k + 1)] .$$

Die Propositionen P_1 und P_2 sind wahr.

Wir nehmen nun induktiv an, dass für ein festes $n \geq 3$ die Proposition P_n wahr ist.

Wir zeigen, dass die Proposition P_{n+1} wahr ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass gilt: $\Delta_{n+1} = (n + 1) + 1$:

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= 2\Delta_n - \Delta_{n-1} && \text{wegen der Rekursion-Formel. . .} \\ &= 2(n + 1) - ((n - 1) + 1) && \text{wegen der Induktionsannahme "P}_n \text{ wahr" . . .} \\ &= 2(n + 1) - n = n + 2 = (n + 1) + 1 . \end{aligned}$$

Durch das Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $P(n)$ für alle $n \geq 1$ wahr.

Fazit: Die Matrix A_n hat maximalen Rang n , da in \mathbb{R} gilt: $\det A_n = \Delta_n = (n + 1) \neq 0$. ■

Einige Computer-Spiele zu diesen Berechnungen:

Definiere die nxn Matrix A in einer Prozedur:

```
with(linalg):
A := proc(n) local i,j,B;
  B:=matrix(n,n);
  for i from 1 to n do
    for j from 1 to n do
      if ( i=j )
        then B[i,j] := 2;
      else
        if ( abs(i-j)=1 )
          then B[i,j] := 1;
          else B[i,j] := 0;
        end if;
      end if;
    od;
  od;
  return B;
end;
## prozedur ENDE
## Zum Beispiel ist A(6) die folgende Matrix:
print(A(6));
## Die Determinante von A(6) ist:
det(A(6));
```

Die Ergebnisse sind:

```
> print(A(6));
[2  1  0  0  0  0]
[  1  2  1  0  0  0]
[  0  1  2  1  0  0]
[  0  0  1  2  1  0]
[  0  0  0  1  2  1]
[  0  0  0  0  1  2]
```

```
> ## Die Determinante von A(6) ist:
> det(A(6));
```